Come si ottiene la formula delle combinazioni con ripetizione

Autore: Prof. Erasmo Modica **Scuola:** Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" - Palermo

Obiettivo: capire da dove nasce la formula, così da riconoscere quando usarla e quando no.

Mappa dell'approfondimento

Road map

Che cosa faremo

1. partire dal problema concreto;
2. tradurlo in un'equazione;
3. usare il metodo *palline e separatori*;
4. arrivare alla formula;
5. confrontarla con le combinazioni semplici;
6. verificarla con esercizi guidati.

Idea chiave

La formula non va vista come una regola isolata, ma come l'esito naturale di un modello combinatorio preciso.

Attenzione

Nel problema che studiamo, l'ordine non conta. Se l'ordine contasse, entreremmo in un contesto diverso.

Perché vale la pena capirla davvero

Idea chiave

Idea chiave

Le combinazioni con ripetizione nascono quando scegliamo un totale di k elementi da n tipi diversi, potendo ripetere i tipi e senza tenere conto dell'ordine.

Obiettivo matematico

Vogliamo ricavare in modo naturale la formula

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Non ci interessa soltanto applicarla: vogliamo vedere *perché* è giusta.

Domanda guida

Sto scegliendo oggetti distinti oppure sto distribuendo una quantità totale tra categorie diverse?

Errore da evitare. Imparare la formula a memoria senza collegarla all'equazione $x_1 + \cdots + x_n = k$.

Situazione

Combinazioni con ripetizione

Abbiamo a disposizione n **tipi** di oggetti e dobbiamo sceglierne in totale k, con tre condizioni:

- la ripetizione è ammessa;
- l'ordine non conta;
- conta soltanto quante volte compare ciascun tipo.

Esempio: la gelateria

$n = 3$ gusti:

- Cioccolato
- Fragola
- Limone

$k = 4$ palline. Esempi di scelta:

$$(2,1,1), \ (4,0,0), \ (0,3,1).$$

Attenzione

La terna $(2,1,1)$ non descrive un ordine di scelta: descrive quante palline prendiamo di ciascun gusto.

La traduzione algebrica

Passaggio

Dalla situazione concreta all'equazione

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indicano quante unità scegliamo di ciascun tipo, allora il problema consiste nel contare le soluzioni intere non negative di

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \qquad x_i \geq 0.$$

Idea chiave

Ogni combinazione con ripetizione corrisponde a una e una sola soluzione dell'equazione. Viceversa, ogni soluzione dell'equazione descrive una combinazione con ripetizione.

Interpretazione corretta Qui non

stiamo scegliendo k oggetti distinti tra n: stiamo distribuendo k unità in n categorie.

Errore da evitare. Confondere questo problema con le combinazioni semplici $\binom{n}{k}$.

Il trucco visivo: palline e separatori

Visuale

Metodo *Stars and Bars*

Rappresentiamo le k scelte con **palline** uguali. Per separare i n tipi usiamo $n-1$ **separatori**. Ogni scelta diventa così una sequenza di palline e barre verticali.

Con $n = 3$ e $k = 4$

$$\bullet\bullet \mid \bullet \mid \bullet \quad \leftrightarrow \quad (2,1,1)$$

$$\bullet\bullet\bullet \mid\mid \bullet \quad \leftrightarrow \quad (3,0,1)$$

$$\mid \bullet\bullet\bullet\bullet \mid \quad \leftrightarrow \quad (0,4,0)$$

Idea chiave

Due separatori consecutivi sono perfettamente leciti: significano che una categoria riceve 0 elementi.

Attenzione

Qui avviene il salto decisivo: non contiamo più direttamente le scelte, ma le sequenze di simboli che le rappresentano.

Il punto decisivo: i posti vuoti

Quanti simboli compaiono in totale?

Ogni sequenza contiene:

- k palline;
- $n - 1$ separatori.

Quindi il numero complessivo dei posti è

$$k + (n - 1) = n + k - 1.$$

Idea chiave

Idea chiave

Costruire una configurazione significa scegliere quali tra questi $n + k - 1$ posti saranno occupati dalle k palline. I posti rimanenti diventeranno automaticamente i separatori.

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$ 6 posti nel caso $n = 3$, $k = 4$

Traduzione combinatoria
Scegliere k posti tra $n + k - 1$

posti totali.

Conteggio

Adesso il problema è semplice

Dobbiamo scegliere k posizioni per le palline tra $n+k-1$ posizioni disponibili. Ma questo è esattamente un problema di **combinazioni semplici**.

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$$

Esempio numerico

Per $n=3$ gusti e $k=4$ palline:

$$n+k-1=3+4-1=6.$$

Attenzione

Non scegliamo i gusti uno alla volta: scegliamo la distribuzione finale delle 4 palline tra i 3 gusti.

Stessa idea, linguaggio diverso

La sequenza $\bullet\ \bullet \mid \bullet \mid \bullet$ può essere vista come la parola

$$P\ P\ S\ P\ S\ P,$$

dove P indica una pallina e S un separatore.

- ci sono k lettere P uguali;
- ci sono $n-1$ lettere S uguali;
- in totale la parola ha $n+k-1$ simboli.

Il numero degli anagrammi distinti è proprio la forma fattoriale del coefficiente binomiale

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Confronto decisivo: combinazioni semplici o con ripetizione?

Confronto

Aspetto	Combinazioni semplici	Con ripetizione
Oggetti ripetibili?	No	Sì
Ordine conta?	No	No
Forma tipica	Scegliere k distinti tra n	Distribuire k unità in n categorie
Formula	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
Equazione associata	–	$x_1 + \cdots + x_n = k$, $x_i \geq 0$

Errore da evitare. Non usare automaticamente $\binom{n}{k}$ soltanto perché nel testo compaiono i numeri n e k.

Attenzione

Da controllare sempre

- Se l'ordine conta, non siamo più nel campo delle combinazioni.
- Due separatori consecutivi sono leciti.
- Il valore 0 è parte naturale del modello.
- Le categorie possono anche rimanere vuote.

Errore da evitare 1 Pensare che tutte le

categorie debbano contenere almeno un elemento.

Errore da evitare 2 Scordare che il

problema equivale a contare soluzioni intere non negative.

Schema finale da ricordare

Passaggio	Idea essenziale
Problema iniziale	Scegliere k elementi da n tipi, con ripetizione e senza ordine.
Traduzione algebrica	Contare le soluzioni di $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, con $x_i \geq 0$.
Modello visivo	Usare k palline e $n-1$ separatori.
Conteggio	Scegliere i k posti delle palline tra $n+k-1$ posti complessivi.
Formula	$\binom{n+k-1}{k}$.

Sintesi

$$\boxed{\text{Capire il modello} \Rightarrow \text{ricavare la formula}}$$

Prova a risolvere

Esercizi

Esercizio 1

Una gelateria offre 4 gusti. In quanti modi si può comporre una vaschetta da 5 palline, se i gusti si possono ripetere e l'ordine non conta?

Esercizio 2

Determina il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.$$

Esercizio 3

Quanti monomi di grado totale 4 si possono formare con le variabili x, y, z?

Esercizio 4

In quanti modi si possono distribuire 7 caramelle indistinguibili tra 3 bambini, ammettendo che qualche bambino possa non ricevere nulla?

Suggerimento Prima di calcolare, chiediti sempre: quante sono le categorie? Qual è il totale da distribuire?

Soluzioni

Esercizio 1

Una gelateria offre 4 gusti. In quanti modi si può comporre una vaschetta da 5 palline, se i gusti si possono ripetere e l'ordine non conta?

Soluzione

Stiamo distribuendo 5 palline tra 4 gusti. Se x_1, x_2, x_3, x_4 indicano quante palline scegliamo per ciascun gusto, allora

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \qquad x_i \geq 0.$$

Perciò il numero delle scelte è

$$\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56.$$

$$\boxed{56}$$

Esercizio 1

Una gelateria offre 4 gusti. In quanti modi si può comporre una vaschetta da 5 palline, se i gusti si possono ripetere e l'ordine non conta?

Soluzione

Stiamo distribuendo 5 palline tra 4 gusti. Se x_1, x_2, x_3, x_4 indicano quante palline scegliamo per ciascun gusto, allora

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \qquad x_i \geq 0.$$

Perciò il numero delle scelte è

$$\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56.$$

$$\boxed{56}$$

Soluzioni

Esercizio 2

Determina il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.$$

Soluzione

Il numero delle soluzioni intere non negative è

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84.$$

$$\boxed{84}$$

Soluzioni

Esercizio 2

Determina il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.$$

Soluzione

Il numero delle soluzioni intere non negative è

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84.$$

$$\boxed{84}$$

Soluzioni

Esercizio 3

Quanti monomi di grado totale 4 si possono formare con le variabili x, y, z?

Soluzione

Un monomio di grado totale 4 ha la forma $x^a y^b z^c$, con

$$a + b + c = 4, \qquad a, b, c \geq 0.$$

Quindi il numero cercato è

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

$$\boxed{15}$$

Esercizio 3

Quanti monomi di grado totale 4 si possono formare con le variabili x, y, z?

Soluzione

Un monomio di grado totale 4 ha la forma $x^a y^b z^c$, con

$$a + b + c = 4, \qquad a, b, c \geq 0.$$

Quindi il numero cercato è

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15.$$

$$\boxed{15}$$

Soluzioni

Esercizio 4

In quanti modi si possono distribuire 7 caramelle indistinguibili tra 3 bambini, ammettendo che qualche bambino possa non ricevere nulla?

Soluzione

Se x_1, x_2, x_3 indicano quante caramelle ricevono i tre bambini, allora

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7, \qquad x_i \geq 0.$$

Perciò il numero delle distribuzioni è

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36.$$

$$\boxed{36}$$

Esercizio 4

In quanti modi si possono distribuire 7 caramelle indistinguibili tra 3 bambini, ammettendo che qualche bambino possa non ricevere nulla?

Soluzione

Se x_1, x_2, x_3 indicano quante caramelle ricevono i tre bambini, allora

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7, \qquad x_i \geq 0.$$

Perciò il numero delle distribuzioni è

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36.$$

$$\boxed{36}$$

Autoverifica

Controlla se hai capito

Sai rispondere a queste domande?

1. Perché compaiono $n-1$ separatori?
2. Perché il numero totale dei posti è $n+k-1$?
3. Che cosa rappresentano due separatori consecutivi?
4. Perché il conteggio finale è un coefficiente binomiale?

Idea chiave

Se riesci a passare con sicurezza dalla situazione concreta all'equazione e poi al modello di palline e separatori, allora la formula è davvero tua.

Attenzione

Se invece parti subito dalla formula senza modellizzare il problema, il rischio di sbagliare resta alto.

Chiusura

La formula non si memorizza soltanto: si costruisce.

Capire il modello significa saper riconoscere quando la combinatoria sta parlando di distribuzioni e non di scelte distinte.

$$\boxed{\text{Combinazioni con ripetizione} = \binom{n+k-1}{k}}$$