

# Come si ottiene la formula delle combinazioni con ripetizione

Prof. E. Modica

Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" – Palermo

## Idea chiave

Molti ricordano la formula delle combinazioni con ripetizione come una regola da applicare. In realtà essa nasce da un'idea molto semplice: **scegliere con ripetizione equivale a distribuire oggetti indistinguibili in categorie distinte**. Il metodo che permette di visualizzare questo passaggio è noto come *Stars and Bars*, cioè metodo delle *stelle e sbarre* o delle *palline e separatori*.

## 1. Il problema da cui partiamo

Abbiamo a disposizione  $n$  tipi diversi di oggetti e vogliamo sceglierne in totale  $k$ , con le seguenti condizioni:

- uno stesso tipo può essere scelto più volte;
- l'ordine non conta;
- conta solo quante volte compare ciascun tipo.

Questa situazione corrisponde alle **combinazioni con ripetizione di  $n$  elementi di classe  $k$** .

### Esempio

Una gelateria offre 3 gusti: *cioccolato*, *fragola*, *limone*. Vogliamo comporre una vaschetta da 4 palline.

Sono ammesse, per esempio, le scelte

$$(2, 1, 1), \quad (4, 0, 0), \quad (0, 3, 1).$$

La terna indica, nell'ordine, quante palline scegliamo di ciascun gusto.

## 2. La traduzione algebrica

Se indichiamo con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  il numero di oggetti scelti dei vari tipi, allora il problema consiste nel contare le soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, \quad x_i \geq 0.$$

Questa è la vera struttura del problema. Non stiamo scegliendo  $k$  oggetti distinti tra  $n$ , ma stiamo distribuendo  $k$  unità tra  $n$  categorie.

### Idea chiave

Ogni combinazione con ripetizione corrisponde a una soluzione dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, \quad x_i \geq 0.$$

Viceversa, ogni soluzione di questa equazione descrive una combinazione con ripetizione.

### 3. Il passaggio visivo: palline e separatori

Rappresentiamo le  $k$  scelte con  $k$  palline uguali tra loro. Per dividere le scelte nei vari tipi usiamo dei separatori.

Se i tipi sono  $n$ , bastano esattamente  $n - 1$  separatori per ottenere  $n$  gruppi.

Nel caso  $n = 3$ ,  $k = 4$ , alcune configurazioni possibili sono:

• • | • | •

che rappresenta  $(2, 1, 1)$ ,

• • • | | •

che rappresenta  $(3, 0, 1)$ , e

| • • • • |

che rappresenta  $(0, 4, 0)$ .

#### Idea chiave

Ogni scelta possibile corrisponde a una e una sola disposizione di  $k$  palline e  $n - 1$  separatori. C'è quindi una **corrispondenza biunivoca** tra combinazioni con ripetizione e sequenze di palline e separatori.

### 4. Primo approccio: i posti vuoti

Questo è il punto più importante della dimostrazione della formula.

Una disposizione è formata da:

- $k$  palline;
- $n - 1$  separatori.

Il numero totale dei simboli è dunque

$$k + (n - 1) = n + k - 1.$$

Immaginiamo allora di avere  $n + k - 1$  posti vuoti in fila. Costruire una configurazione significa scegliere in quali di questi posti collocare le  $k$  palline. I posti rimanenti saranno occupati dai separatori. Il problema si trasforma quindi in una domanda molto più semplice:

*in quanti modi possiamo scegliere  $k$  posti tra  $n + k - 1$  posti totali?*

Ma questo è proprio un problema di **combinazioni semplici**. Perciò il numero cercato è

$$\binom{n + k - 1}{k}.$$

#### Esempio

Nel caso della gelateria con  $n = 3$  gusti e  $k = 4$  palline, il numero totale delle posizioni è

$$3 + 4 - 1 = 6.$$

Scegliere una vaschetta equivale a scegliere le 4 posizioni occupate dalle palline tra 6 posizioni disponibili. Dunque il numero delle scelte possibili è

$$\binom{6}{4} = 15.$$

## 5. Secondo approccio: gli anagrammi

Possiamo arrivare alla stessa formula anche in modo puramente algebrico.

Indichiamo con:

- $P$  le palline;
- $S$  i separatori.

La configurazione

• • | • | •

diventa allora la parola

$P P S P S P$ .

Questa parola è formata da:

- $k$  lettere  $P$  uguali tra loro;
- $n - 1$  lettere  $S$  uguali tra loro.

Il numero degli anagrammi distinti di questa parola è dato dalla formula delle permutazioni con ripetizione:

$$\frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!}.$$

Ma, per definizione di coefficiente binomiale,

$$\binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k!((n + k - 1) - k)!} = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!}.$$

Otteniamo dunque ancora una volta la stessa espressione.

### Idea chiave

La spiegazione visiva e quella algebrica non sono due metodi indipendenti: descrivono la stessa struttura combinatoria da due punti di vista diversi.

## 6. La formula finale

### Da ricordare

Il numero delle combinazioni con ripetizione di  $n$  elementi di classe  $k$  è

$$\binom{n + k - 1}{k}.$$

Per la simmetria del coefficiente binomiale si può anche scrivere

$$\binom{n + k - 1}{n - 1}.$$

## 7. Quando si usa questa formula

La formula delle combinazioni con ripetizione è utile quando:

- si scelgono  $k$  oggetti da  $n$  tipi;
- uno stesso tipo può comparire più volte;
- l'ordine non conta;
- il problema si può tradurre in un'equazione del tipo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad x_i \geq 0.$$

## 8. Errori frequenti

### Attenzione

1. **Confondere ordine e quantità.** Se conta l'ordine, non siamo più nel campo delle combinazioni.
2. **Usare  $\binom{n}{k}$  al posto di  $\binom{n+k-1}{k}$ .** Questo accade quando si dimentica che uno stesso tipo può essere scelto più volte.
3. **Dimenticare lo zero.** Alcune categorie possono anche non ricevere alcun elemento; per questo possono comparire due separatori consecutivi.
4. **Non riconoscere l'equazione associata.** Se compare una somma del tipo  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$  con  $x_i \geq 0$ , è spesso il segnale giusto per pensare alle combinazioni con ripetizione.

## 9. In sintesi

Idea	Contenuto essenziale
Problema di partenza	Scegliere $k$ elementi da $n$ tipi, con ripetizione e senza ordine.
Traduzione algebrica	Contare le soluzioni intere non negative di $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ .
Modello visivo	Rappresentare le scelte con $k$ palline e $n - 1$ separatori.
Conteggio finale	Scegliere $k$ posizioni tra $n + k - 1$ , cioè $\binom{n+k-1}{k}$ .
Formula equivalente	$\binom{n+k-1}{n-1}$ .

## 10. Esercizi finali per il ripasso

### Per il ripasso

1. Una gelateria offre 4 gusti. In quanti modi si può comporre una vaschetta da 5 palline, se i gusti si possono ripetere e l'ordine non conta?
2. Determina il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.$$

3. Quanti monomi di grado totale 4 si possono formare con le variabili  $x, y, z$ ?
4. In quanti modi si possono distribuire 7 caramelle indistinguibili tra 3 bambini, ammettendo che qualche bambino possa non ricevere nulla?

### Osservazione conclusiva

La formula delle combinazioni con ripetizione non va imparata come una regola isolata. Essa nasce da un'idea precisa: **trasformare una scelta con ripetizione in una disposizione di palline e separatori**. Quando questo passaggio viene compreso, la formula non appare più come qualcosa da memorizzare, ma come la conseguenza naturale di un conteggio ben costruito.

## Soluzioni del ripasso

### Esercizio 1

Una gelateria offre 4 gusti. In quanti modi si può comporre una vaschetta da 5 palline, se i gusti si possono ripetere e l'ordine non conta?

**Soluzione.** Dobbiamo distribuire 5 palline tra 4 gusti.

Se indichiamo con  $x_1, x_2, x_3, x_4$  il numero di palline scelte per ciascun gusto, otteniamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \quad x_i \geq 0.$$

Si tratta quindi di un problema di combinazioni con ripetizione:

$$\binom{4 + 5 - 1}{5} = \binom{8}{5}.$$

Calcoliamo:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

56

**Esercizio 2**

Determina il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.$$

**Soluzione.** Anche qui stiamo distribuendo il totale 6 tra 4 variabili non negative.

Il numero delle soluzioni è quindi

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}.$$

Calcoliamo:

$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

84

**Esercizio 3**

Quanti monomi di grado totale 4 si possono formare con le variabili  $x, y, z$ ?

**Soluzione.** Un monomio di grado totale 4 nelle variabili  $x, y, z$  ha la forma

$$x^a y^b z^c$$

con

$$a + b + c = 4, \quad a, b, c \geq 0.$$

Dunque dobbiamo contare le soluzioni intere non negative dell'equazione

$$a + b + c = 4.$$

Il numero cercato è

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}.$$

Calcoliamo:

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

15

## Esercizio 4

In quanti modi si possono distribuire 7 caramelle indistinguibili tra 3 bambini, ammettendo che qualche bambino possa non ricevere nulla?

**Soluzione.** Se  $x_1, x_2, x_3$  indicano quante caramelle ricevono i tre bambini, allora

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7, \quad x_i \geq 0.$$

Ancora una volta abbiamo un conteggio di soluzioni intere non negative, quindi:

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7}.$$

Calcoliamo:

$$\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

$\boxed{36}$