TEOREMI SUI LIMITI

Teorema di unicità del limite: *Se una funzione $y = f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ allora esso è unico.*

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo che la funzione ammetta due limiti $l \neq l'$ allora si ha:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists I(x_0) / \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \ |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$,
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l' \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists I'(x_0) / \forall x \in I'(x_0) - \{x_0\} \ |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$.

Data l'arbitrarietà di ε, è possibile sceglierlo in modo tale che $\varepsilon < |l - l'|$.
Preso comunque $x \in I(x_0) \cap I'(x_0)$, la (1) e la (2) sono verificate e quindi:

$$|f(x) - l| + |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ma

$$|l - l'| = |[f(x) - l] - [f(x) - l']|$$

e quindi

$$|l - l'| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

Ma per ipotesi $\varepsilon < |l - l'|$ e quindi deve essere $|l - l'| = 0 \quad \Rightarrow \quad l = l'$.

□

Teorema della permanenza del segno: *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$ esiste un intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0, tale che $f(x)$ assume lo stesso segno di l.*
Viceversa se esiste un intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0, tale che la funzione sia positiva (negativa) ed esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora $l \geq 0$.

Dimostrazione:

Prima implicazione
Per ipotesi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists I(x_0) / \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \ |f(x) - l| < \varepsilon$,
e quindi

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

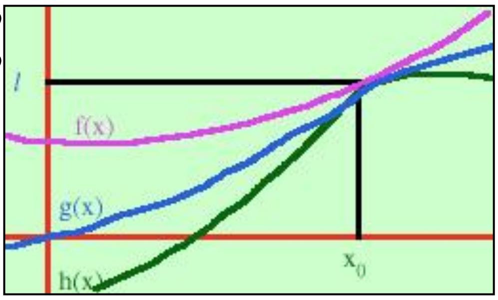
a) Sia $l > 0$, data l'arbitrarietà di ε possiamo porre $\varepsilon = l$ e ottenere: $0 < f(x) < 2l \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$.
b) Sia $l < 0$, data l'arbitrarietà di ε possiamo porre $\varepsilon = -l$ e ottenere: $2l < f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < 0$.

Seconda implicazione
Per ipotesi: $\exists I(x_0) / \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \quad f(x) > 0$.

Se per assurdo fosse $l<0$ per la prima parte del teorema esisterebbe un $I(x_0)$ tale che in tale intorno $f(x)$ sia negativa. Ciò è assurdo perché contro l'ipotesi.

□

<u>Teorema del confronto (o dei due carabinieri)</u>: Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tre funzioni definite in un intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0 e tali che



$$h(x) \le g(x) \le f(x).$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

<u>Dimostrazione</u>:
Per ipotesi:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists I(x_0) / \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \;\; l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \qquad (1),$
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists I'(x_0) / \forall x \in I'(x_0) - \{x_0\} \;\; l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon \qquad (2).$

Preso comunque $x \in I(x_0) \cap I'(x_0)$, la (1) e la (2) sono verificate e quindi:

$$l-\varepsilon < h(x) \le g(x) \le f(x) < l+\varepsilon$$

e quindi

$$l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon.$$

□