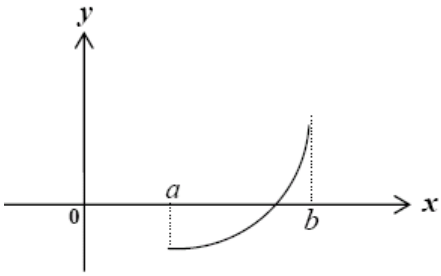
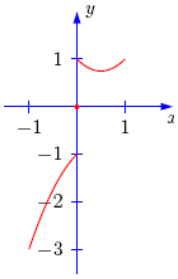
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: *Se una funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$ ed assume valori opposti negli estremi di questo intervallo, allora esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo $[a;b]$ tale che $f(x_0)=0$.*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua in } [a;b] \\ f(a)>0 \ \wedge \ f(b)<0 \\ \textit{oppure} \\ f(a)<0 \ \wedge \ f(b)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists x_0 \in]a;b[: f(x_0)=0$$

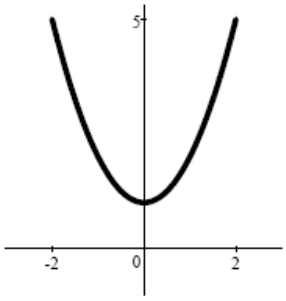
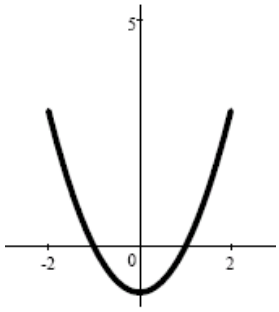


Osservazioni:

1. Nell'enunciato del teorema leggiamo che la funzione ammette "*almeno*" un punto in cui la funzione si annulla, ciò non esclude il fatto che la funzione ne possa ammettere più di uno.
2. Non è importante sapere quale tra $f(a)$ e $f(b)$ sia positivo, è importante che sia negativo il prodotto $f(a)\cdot f(b)$.
3. È fondamentale l'ipotesi di continuità della funzione *f*, in quanto se la funzione è discontinua non è detto che essa ammetta uno zero.



4. Se il prodotto $f(a)\cdot f(b)$ è positivo non possiamo dire nulla sull'esistenza di zeri per la funzione *f*.

Nell'intervallo $[-2;2]$ la funzione $f(x)=x^2+1$ è tale che $f(2)\cdot f(-2)=25>0$ ma non si annulla mai. 	Nell'intervallo $[-2;2]$ la funzione $f(x)=x^2-1$ è tale che $f(2)\cdot f(-2)=9>0$ ma si annulla due volte. 

CONSEGUENZA DEL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: *Ogni polinomio* $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *di grado dispari ammette almeno uno zero reale.*

Dimostrazione:

Distinguiamo i seguenti casi:

<u>I caso</u>: $a_n > 0$

In questo caso si ha che $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$ e quindi esisteranno un numero reale $a<0$ e $b>0$ tali che $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Di conseguenza, per il teorema di esistenza degli zeri, si ha la tesi.

<u>II caso</u>: $a_n < 0$

In questo caso si ha che $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \mp\infty$ e quindi esisteranno un numero reale $a<0$ e $b>0$ tali che $f(a)>0$ e $f(b)<0$. Di conseguenza, per il teorema di esistenza degli zeri, si ha la tesi.

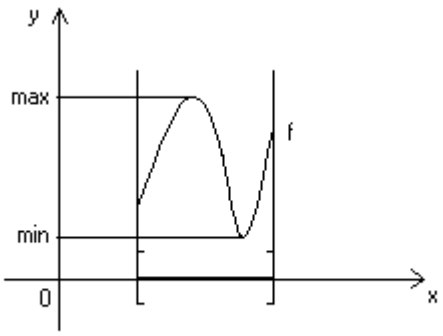
Esempio di applicazione: *Stabilire se l'equazione* $x+2^x=0$ *ammette soluzioni nell'intervallo* $[-1;0]$.

Consideriamo la funzione $f(x)=x+2^x$. Essa è continua nell'intervallo considerato e inoltre:

$$f(-1)=-1+2^{-1}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$$
$$f(0)=0+e^0=0+1>0$$

Per il teorema di esistenza degli zeri esiste quindi un punto x_0 interno all'intervallo $[-1;0]$ in cui la funzione si annulla e quindi possiamo concludere che l'equazione di partenza ammette almeno una soluzione all'interno dell'intervallo $[-1;0]$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS: *Se una funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a;b]$, *allora essa assume, in tale intervallo, un valore minimo e un valore massimo.*



Osservazioni:

1. Dal teorema di Weierstrass discende che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è limitata, cioè esistono due punti $x_1, x_2 \in [a;b]$ tali che:
$$m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M \qquad \forall x \in [a;b]$$
2. Affinché il teorema sia valido è fondamentale $[a;b]$ sia chiuso e limitato. Infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1;+\infty[$, che è chiuso ma non limitato, ammette massimo $M = 1$, ma non ammette minimo.

Esempio di applicazione: *Stabilire se la funzione $f(x) = x + 2^x$ ammette massimo e minimo nell'intervallo $[-1;0]$.*

Essendo la funzione continua nell'intervallo considerato, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo.

TEOREMA DI DARBOUX: *Se una funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.*

Osservazione: Il teorema ci assicura che una funzione continua in un intervallo non può avere *salti*.

ESERCIZI

Applicando i teoremi sulle funzioni continue, risolvere i seguenti quesiti.

1. Verificare che l'equazione $x^3 + x^2 - 4 = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[1;2]$.
2. Verificare che l'equazione $\log(x-5) + x - 7 = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[6;7]$.
3. Dire se la funzione $f(x) = e^x$ ammette minimo nell'intervallo $[0;+\infty[$. E' applicabile il teorema di Weierstrass?
4. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + x$ nell'intervallo $[-1;1[$. Tale funzione ammette minimo?
5. Si consideri la funzione $f(x) = \log x$ nell'intervallo $[1;e]$. È applicabile il teorema di Weierstrass? Quali sono i valori massimi e i valori minimi della funzione nell'intervallo considerato?
6. Verificare che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0;1]$.
7. Verificare che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[2;3]$.
8. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0;1]$.