CONSIGLI PER LA DETERMINAZIONE DEI LIMITI DI FUNZIONI

I CASO

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty} \qquad \begin{cases} l = \text{ numero finito} \\ \text{rapporto tra i coefficienti dei termini di grado maggiore se il grado di f è uguale a quello di g} \\ l=\infty \\ \text{se il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore} \\ l=0 \\ \text{se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore} \end{cases}$$

Bisogna dividere numeratore e denominatore per x elevato al grado massimo, oppure bisogna moltiplicare e dividere sia il numeratore che il denominatore per il rispettivo termine di grado maggiore.

II CASO

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(x-x_0)}(........)}{\cancel{(x-x_0)}(........)}$$

Bisogna scomporre numeratore e denominatore utilizzando la regola di Ruffini per $x=x_0$ o le regole di scomposizione e comparirà sia a numeratore che a denominatore il fattore $(x-x_0)$ che si dovrà semplificare.

III CASO

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]=+\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]\cdot\left[\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right]}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Bisogna razionalizzare e ci si riconduce al primo caso.

IV CASO

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{\sqrt{p(x)}+\sqrt{q(x)}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]\cdot\left[\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right]\cdot\left[\sqrt{p(x)}-\sqrt{q(x)}\right]}{\left[\sqrt{p(x)}+\sqrt{q(x)}\right]\cdot\left[\sqrt{p(x)}-\sqrt{q(x)}\right]\cdot\left[\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right]}$$

Si devono razionalizzare numeratore e denominatore e ci si riconduce al secondo caso.

V CASO

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{q(x)}{p(x)}=-\infty+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\frac{f(x)\cdot p(x)-q(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot p(x)}$$

Basta fare il m.c.m. e si ottiene un’unica frazione che si riconduce al secondo caso se $x\to x_0$, oppure al primo caso se $x\to\infty$, oppure al caso successivo se si hanno funzioni trigonometriche.

VI CASO

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\textit{funzione goniometrica}}{\textit{funzione goniometrica}}=\frac{0}{0}$$

Bisogna usare le formule della goniometria e ottenere uno stesso fattore tendente a zero da semplificare, oppure, se non si riesce a ricondurli ad uno stesso fattore, si cerca di ricondurlo al limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

o, in generale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=(1-\sin x)(1+\sin x)$$
$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$$
$$\sin^2 x-\cos^2 x=(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)$$
$$1-\cos^3 x=(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)$$

VII CASO

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2,7182\ldots \qquad \lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

Bisogna cercare di portare la funzione alla somma di $\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)$ e poi rendere l’esponente uguale al denominatore.
Bisogna tenere conto delle relazioni:

$$y=\left[f(x)\right]^{g(x)} \qquad y=e^{\log f(x)^{g(x)}} \qquad y=e^{g(x)\cdot\log f(x)}$$

Forme Indeterminate

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\cdot\infty \qquad +\infty-\infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

Per le forme indeterminate del tipo 1^{∞} 0^{0} ∞^{0} si ricorre ai logaritmi

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0} g(x)\cdot\log f(x)}$$

VIII Caso

Per le forme indeterminate del tipo $+\infty-\infty$ si osserva:

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}=0 \qquad\qquad \lim_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}=\infty$$

Forme determinate da riconoscere

$$+\infty+\infty=\infty \qquad -\infty-\infty=-\infty \qquad \infty\cdot n=\infty \qquad \infty+n=\infty$$

$$\frac{\infty}{0}=\infty \qquad \frac{0}{\infty}=0\cdot\frac{1}{\infty}=0 \qquad +\infty-(-\infty)=+\infty$$