Polinomi

E. Modica
erasmo@galois.it

Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" - Palermo

A.S. 2017/2018

L'orto...

Qual è la lunghezza delle assi necessarie a creare un'aiuola rettangolare sapendo che le sue dimensioni sono x e y?

Se si indica con p il perimetro dell'aiuola si ha:

$$p = 2x + 2y$$

Definizione di polinomio

L'espressione trovata nel problema precedente, somma di due monomi, è un esempio di polinomio.

Definizione

Dicesi **polinomio** un'espressione algebrica formata dalla somma (algebrica) di due o più monomi, detti termini del polinomio.

Esempi

Le seguenti scritture sono esempi di polinomi.

- $a^2 + 3ab - 1$
- $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy - 4y^3$

Forma normale

Definizione

Un polinomio si dice scritto in **forma normale** se in esso non sono presenti monomi simili o monomi che non siano scritti in forma normale.

Esempio

Il polinomio

$$3x^2 - 4x + x^2 - 1$$

non è scritto in forma normale, mentre il polinomio

$$4x^2 - 4x - 1$$

è scritto in forma normale.

Grado di un polinomio

Definizione

Dicesi **grado** di un polinomio il massimo tra i gradi dei singoli monomi che lo compongono.

Esempio

Il polinomio

$$2x^2y + 3xy^2 - 3x + 4x^3y^2 - 1$$

è costiuito da 5 monomi che hanno gradi, rispettivamente, 3, 3, 1, 5, 0. Quindi, il grado del polinomio è 5.

Polinomi omogenei

Definizione

Dicesi **polinomio omogeneo di grado n** un polinomio costituito da monomi aventi tutti lo stesso grado n.

Esempio

Il polinomio

$$2x^2y + 3xy^2$$

è un polinomio omogeneo di grado 3 in quanto i monomi che lo compongono hanno grado complessivo pari a 3.

Polinomi ordinati

Definizione

Un polinomio in una variabile si dice **ordinato** se i monomi che lo costituiscono sono ordinati secondo le potenze crescenti o decrescenti della variabile.

Esempio

Il polinomio

$$P(x) = 7x^5 - 12x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{4}$$

è un polinomio ordinato secondo le potenze descrescenti della variabile x ma manca del termine di grado 3.

Polinomi completi

Definizione

Un polinomio di grado n in una variabile si dice **completo** se contiene tutte le potenze della variabile da zero a n. In generale si scrive:

$$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$$

Esempio

Il polinomio

$$P(x) = 7x^5 - 12x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{4}$$

è un polinomio ordinato e completo.

Polinomi uguali

Definizione

Due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ nella stessa variabile sono **uguali** se, per qualunque valore si sostituisca alla variabile x, si ottengono uguali valori. Per indicare ciò si scrive

$$P(x) \equiv Q(x)$$

Osservazione

I due polinomi sono uguali se:

- $P(x)$ e $Q(x)$ sono dello stesso grado;
- sono uguali i coefficienti di ogni termine di ugual grado di $P(x)$ e di $Q(x)$.

Questa proprietà prende il nome di **principio d'identità dei polinomi**.

Esercizi

Esercizio 1

Scrivere il grado complessivo dei seguenti polinomi:

- $4x^2y - 2xy^3 + 3x^2 - 1$
- $-3a^4b + 8ab^2 - 7a^3b^2 - 1$

Esercizio 2

Tra i seguenti polinomi, indicare quelli omogenei:

(A) $-3x^3 + 4x^2yz + 10yz^2$

(B) $8a^2b^2 + 2ab^3 + 5a^2bc$

(C) $5ax^6 - 7a^3x^2y^2 - x^4y^3$

(D) $4x^5 + 3y^5 - 5$

Esercizi

Esercizio 3

Scrivere:

- un polinomio di grado complessivo 4
- un polinomio di grado 5 nella sola variabile x
- un polinomio omogenero di grado 8
- un polinomio di grado complessivo 4 e di grado 2 rispetto alla variabile y
- un polinomio completo e omogeneo di grado 4
- un polinomio in x e y omogeneo e ordinato di grado 4.

Somma algebrica

Per effettuare la somma algebrica di due polinomi è necessario sommare tutti i termini simili nel caso in cui essi siano presenti.

Esempi

- $(ab - x) + (x^2 + 3a) = ab - x + x^2 + 3a$
  (non ci sono termini simili)
- $(4x^2 - 3x) - (5x - x^2) = 4x^2 - 3x - 5x + x^2 = 5x^2 - 8x$
  (abbiamo sommato i termini simili)

Prodotto di un polinomio per un monomio

Ricordando la *proprietà distributiva* della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

possiamo notare come essa altro non sia se non la moltiplicazione di un monomio per un binomio. Possiamo quindi considerare la seguente:

Regola operativa

Per moltiplicare un polinomio per un monomio è necessario moltiplicare tutti i termini del polinomio per il monomio.

Esempi

- $3a \cdot (2a^2 + a - 3) = 6a^3 + 3a^2 - 9a$
- $\frac{1}{3}x^2y \cdot (xy - 9x^3 + 5y) = \frac{1}{3}x^3y^2 - 3x^5y + \frac{5}{3}x^2y^2$

Prodotto tra due polinomi

Dall'applicazione ripetuta della proprietà distributiva si perviene alla seguente:

Regola operativa

Per moltiplicare due polinomi tra loro è necessario moltiplicare tutti i termini del primo polinomio per tutti i termini del secondo e ridurre i termini simili.

Esempi

- $(x^2 - x + 1) \cdot (2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x + 2x + 3 = 2x^3 + x^2 - x + 3$
- $(2a + 3b)^2 = (2a + 3b) \cdot (2a + 3b) = 4a^2 + 6ab + 6ba + 9b^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

Esercizi

Esercizi

Semplificare le seguenti espressioni:

- $(a-3a^2)-2\left[-\frac{3}{2}(ab-a+b)+5\left(a^2-b^2\right)\right]-4a$
- $\left(\frac{2x^2y^2+xy}{3}-5xy\right)+\left(2x^2y^2-\frac{6xy+4x^2y^2}{3}\right)$
- $4\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)-\frac{1}{3}a^2b\left(2a-a^2\right)-\frac{4}{3}ab(-a)^2$
- $2(x-3)(y+2)(x-1)-xy(5-x)(y+2)$

Problema

Il lato di un quadrato misura a. Esso viene trasformato in un rettangolo, aumentando un lato di x, e diminuendo di y quello ad esso perpendicolare. Esprimere con un polinomio l'area del rettangolo ottenuto.

Premessa

Esistono alcuni casi di moltiplicazione di polinomi che possono essere svolti in maniera veloce e senza dover effettuare eccessivi calcoli.

Definizione

Si definiscono **prodotti notevoli** le moltiplicazioni di polinomi che danno luogo a risultati ottenibili in modo più semplice e rapido e facilmente ricordabili.

Quadrato di un binomio

Effettuiamo lo svolgimento del quadrato del binomio $a+b$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Traduzione nel linguaggio naturale...

Il quadrato della somma di due monomi è dato dalla somma del quadrato del primo termine, del doppio prodotto del primo termine per il secondo e del quadrato del secondo termine.

Il capitale investito

Problema

Il signor Rossi possiede un capitale C, lo investe al tasso di interesse annuale costante x. Qual è, in funzione di x il capitale C_2 c he può ritirare dopo 2 anni?

Dopo un anno il capitale del signor Rossi è:

$$C_1 = C + x \cdot C = C \cdot (1 + x)$$

Dopo due anni il capitale è pari a:

$$C_2 = C_1 + x \cdot C_1 = C_1 \cdot (1 + x) = c \cdot (1 + x) \cdot (1 + x) = C \cdot (1 + x)^2$$

Quindi siamo di fronte ad una situazione problematica nella quale è necessario calcolare il quadrato di un binomio.

Esempi

Esempio 1

$$(3x+4y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot(3x)\cdot(4y) + (4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

Esempio 2

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2+2y\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^2 + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)\cdot(2y) + (2y)^2 = \tfrac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 4y^2$$

Esempio 3

$$(3y-2x)^2 = (3y)^2 + 2\cdot(3y)\cdot(-2x) + (-2x)^2 = 9y^2 - 12xy + 4x^2$$

Come riconoscere il quadrato di un binomio

Consigli utili

Se un polinomio è costituito da tre addendi di cui due sono quadrati e il terzo è il doppio prodotto delle loro basi, allora il polinomio è il quadrato della somma delle basi:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Esempio

Il trinomio:

$$x^4 + 10x^2y + 25y^2$$

è il quadrato del binomio:

$$x + 5y$$