Introduzione al calcolo letterale

E. Modica
erasmo@galois.it

Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" - Palermo

A.S. 2017/2018

Premessa

Nella vita quotidiana ci capita spesso di imbatterci in situazioni che comportano l'uso di simboli per indicare qualcosa. Per esempio le lettere **H** e **P** vengono utilizzate nei cartelli stradali per rappresentare, rispettivamente, gli ospedali e i parcheggi.

Simbolo

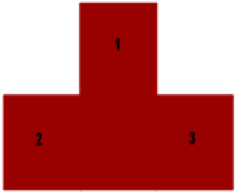
Si definisce **simbolo** uno strumento utilizzato per comunicare in maniera sintetica un significato.

Un simbolo è efficace e raggiunge il suo scopo solo quando può essere **interpretato** in maniera inequivocabile, in base al **contesto** in cui esso viene usato.

Il rivestimento

Problema

Si vuole riverniciare la superficie esterna di un podio, formato da quattro cubi uguali tra loro, disposti come in figura. Com'è possibile determinare la superficie da verniciare?



Procedimento:

- Si indica con l la lunghezza dello spigolo di ogni cubo.
- Si contano le facce che compongono la superficie esterna del podio.
- Constatato che il numero di facce è uguale a 15, è possibile determinare la superficie A da verniciare tramite la formula: $A = 15 \cdot l^2$

Osservazione

La formula

$$A = 15 \cdot l^2$$

ci permette di risolvere tutti i problemi della stessa tipologia: per determinare l'area basta sostituire al posto della lettera l il valore numerico del lato, lo si eleva al quadrato e si moltiplica per 15.

Esempio

Se si vuole calcolare l'area di un podio formato cubi di spigolo pari a $l = 2cm$, basta effettuare le seguenti operazioni:

$$A = 15 \cdot l^2 = 15 \cdot (2)^2 = 15 \cdot 4 = 60cm^2$$

Modello matematico

La formula determinata nel problema appena commentato prende il nome di **modello matematico** del problema.

Definizione

Dicesi ***modello matematico*** una versione semplificata e immaginaria della realtà che si vuole studiare, in cui è possibile effettuare calcoli esatti.

Importanza dei modelli matematici

- Effettuare previsioni.
- Indagare circa le proprietà di ciò che si vuole studiare.

Espressioni come modello di calcolo

Nello studio dell'algebra le *espressioni letterali* vengono viste come **modelli di calcolo** indipendenti dal loro significato contestuale. Operando in questo modo, quando si ha di fronte un'espressione letterale bisogna:

- riconoscere quali sono le operazioni che esse sintetizzano;
- comprendere in quale ordine le suddette operazioni vanno eseguite.

In sintesi bisogna determinare il cosiddetto ***schema di calcolo*** indicato dalle espressioni letterali.

Esempio di decodifica (1)

Se consideriamo l'espressione letterale

$$A = 15 \cdot l^2$$

ottenuta nel caso del problema del rivestimento di un podio e la decontestualizziamo, possiamo fissare l'attenzione sulle operazioni coinvolte e diciamo "***calcolare il quadrato di un numero e moltiplicarlo per 15***".

l	l^2	$A = 15 \cdot l^2$
2	4	60
7	49	735
0.5	0.25	3.75

Esempio di decodifica (2)

Consideriamo l'espressione letterale

$$\frac{a^2+1}{a}$$

Le operazioni coinvolte sono esprimibili come:

- effettuare il quadrato di a;
- sommare al quadrato di a il numero 1;
- dividere il risultato per a

a	$\frac{a^2+1}{a}$
1	$\frac{1^2+1}{1} = 2$
3	$\frac{3^2+1}{3} = \frac{10}{3}$
0	Nessun risultato

Osservazione

Nell'espressione precedente non è possibile sostituire lo 0 alla lettera a in quanto la frazione perderebbe di significato.
Deduciamo quindi che:

Attenzione

Se il denominatore di una frazione contiene delle lettere, non è possibile attribuire ad esse quei valori che rendono nullo il denominatore.

Introduzione

In una formula si dicono ***variabili*** le lettere alle quali può essere sostituito qualsiasi valore numerico; i numeri prendono, invece, il nome di ***costanti***.

Esempio

Nella formula per il calcolo della lunghezza della circonferenza $C = 2\pi r$ le costanti sono i numeri 2 e π, r è detta variabile indipendente perché può assumere un qualsiasi valore numerico mentre C è una variabile dipendente perché il suo valore numerico dipende da quello assunto da r.

Valore numerico di un'espressione

Esercizio 1

Determinare il valore numerico dell'espressione $5a - b + \frac{1}{a} - b^2$ quando $a = \frac{1}{10}$ e $b = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Determinare il valore numerico dell'espressione $(a^2 + 3b^2) \cdot (2ab - a^2)$ quando $a = -0,5$ e $b = 0,\overline{3}$.

Esercizio 3

Determinare il valore numerico dell'espressione $\frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{a^2+1}$ quando $a = -\frac{2}{5}$.

Dal linguaggio naturale a quello simbolico

Esempio 1

Sommare al quadrato di a il triplo di b.

Poiché il quadrato di a è a^2 e il triplo di b è $3b$, la loro somma è data da:

$$a^2 + 3b$$

Esempio 2

Aggiungere il quadrato di a al rapporto tra a e il doppio di b.

Poiché il quadrato di a è a^2 e il doppio di b è $2b$, si ha:

$$\frac{a}{2b} + a^2$$

Dal linguaggio naturale a quello simbolico

Esercizio 1

Sottrarre al doppio della somma di a con b il prodotto di a per il quadrato di b.

Esercizio 2

Dividere la differenza tra i quadrati di a e di b per la somma di a con il cubo di b.

Dal linguaggio simbolico a quello naturale

Esempio 1

Tradurre nel linguaggio naturale l'espressione $a^2 - 3b$.

Sottrarre il triplo di b al quadrato di a.

Esempio 2

Tradurre nel linguaggio naturale l'espressione $(a - 2b)^2$.

Effettuare il quadrato della differenza tra a e il doppio di b

Dal linguaggio naturale a quello simbolico

Esercizio 1

Tradurre nel linguaggio naturale l'espressione:

$$a^2 : \left(a + b^2\right)$$

Esercizio 2

Tradurre nel linguaggio naturale l'espressione:

$$(a - b)^2 \cdot \left(a^2 - b^2\right)$$

Definizione di monomio

Definizione

Dicesi ***monomio*** un'espressione letterale in cui compaiono solo la moltiplicazione tra numeri e lettere e potenze con esponente naturale.

Esempio

Le seguenti espressioni letterali sono monomi:

$$3x^2y, \quad \sqrt{2}yz^3, \quad 3, \quad -\frac{1}{3}ab^2c$$

I monomi sono costituiti da un ***coefficiente numerico*** e da una ***parte letterale***:

$$\underbrace{16}_{\textit{coefficiente}} \cdot \underbrace{x^5y^2z}_{\textit{parte letterale}}$$

Monomi simili e grado

Definizione

Due monomi si dicono **simili** se hanno la stessa parte letterale.

Esempio

I monomi $-3x^2y$ e $\frac{4}{7}x^2y$ sono simili.

Definizione

Si dice **grado complessivo** di un monomio la somma degli esponenti di tutte le lettere che compaiono nella parte letterale.

Esempio

Il grado del monomio $-3x^2y$ è 3.

Osservazioni

Osservazione 1

Le espressioni $\sqrt{ab^2}$ e $3bc^{\frac{2}{3}}$ non sono monomi in quanto gli esponenti della parte letterale devono essere numeri naturali.

Osservazione 2

Le espressioni $\frac{2a^2b}{b^2}$ e $4bc^{-3}$ non sono monomi per lo stesso motivo precedente. Questo ci fa capire che *nell'insieme dei monomi la divisione non è definita*.

Osservazione 3

L'espressione $7a^3 - b$ non è un monomio.

Esercizi

Esercizio

Individuare tra le seguenti espressioni letterali i monomi.

- $7x^2y^{-1}z$
- $2^{-1}x^3yv^2$
- $\frac{1}{2}x^2z^3y^2$
- $\frac{3}{2}x^{-1}z^2$

Monomi opposti

Definizione

Due monomi si dicono **opposti** se hanno le parti letterali uguali e i coefficienti numerici opposti.

Esempio

I monomi $-3x^2y$ e $3x^2y$ sono opposti.

Esercizio

Esercizio

Scrivere un monomio di quinto grado avente grado 2 rispetto alla variabile a e grado 1 rispetto alla variabile x.

Monomi come modello

Esercizio

Un parallelepipedo di base quadrata ha lo spigolo di base pari a $2a$ e l'altezza pari al triplo dello spigolo di base. Rappresentare, mediante un monomio, il suo volume.

Indicando con l lo spigolo di base e con h l'altezza si ha:

$$V = S_b \cdot h = (2a)^2 \cdot 3(2a) = 4a^2 \cdot 6a = 24 \cdot a^3$$

Esercizi proposti

Esercizi

Rappresenta mediante un opportuno monomio le seguenti grandezze geometriche.

- L'area di un quadrato di base $3y$.
- L'area di un rettangolo di base $2a$ e altezza $4a$.
- L'area di un triangolo di base $7x$ e altezza $\frac{1}{2}x$.

Somma di monomi

Definizione

La **somma** di due monomi simili è un monomio simile a quelli dati che ha per coefficiente numerico la somma algebrica dei coefficienti numerici e per parte letterale la parte letterale degli addendi.

Esempio

Il monomio somma dei monomi $\frac{1}{2}x^2z$ e $-\frac{1}{3}x^2z$ è il monomio $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2z=\frac{1}{6}x^2z$.

Proprietà della somma

La somma tra monomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma;
- ogni monomio ammette opposto.

Prodotto di monomi

A differenza della somma, è sempre possibile moltiplicare due monomi.

Definizione

Il **prodotto** di due monomi è un monomio che ha per coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti numerici e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

Esempio

Il monomio prodotto dei monomi $\frac{5}{2}x^2z$ e $-\frac{2}{3}x^2z^2y$ è il monomio $-\frac{5}{3}x^4z^3y$.

Proprietà della moltiplicazione

La moltiplicazione tra monomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

Osservazione

"Perché nell'insieme dei monomi non è possibile definire una divisione?"

Per rispondere alla precedente domanda basta osservare che, quando trattiamo con i numeri reali, definiamo la divisione tra due numeri a e b (con $b \neq 0$), come il prodotto del primo per l'inverso del secondo, cioè:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

L'inverso di un monomio non sempre è un monomio, in quanto si possono presentare, nella parte letterale, dei termini ad esponente negativo.

Potenza di monomi

Nell'insieme dei monomi è possibile effettuare l'elevazione a potenza con esponente naturale.

Definizione

La **potenza**, con esponente naturale, di un monomio è un monomio che ha come coefficiente numerico la potenza del coefficiente numerico e come parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio

La terza potenza del monomio $\frac{3}{2}x^3y^2z^2$ è il monomio $\left(\frac{3}{2}x^3y^2z^2\right)^3 = \frac{27}{8}x^9y^6z^6$.

Multipli e divisori di monomi

Nell'insieme dei monomi è possibile definire il concetto di multiplo.

Definizione

Dati due monomi A e B diremo che A è **multiplo** di B se esiste un monomio C tale che $A = B \cdot C$. Il monomio B prende il nome di **divisore** di A.

Osservazione

Per stabilire se il monomio A è multiplo del monomio B basta stabilire se il coefficiente numerico di A è multiplo di quello di B e se gli esponenti delle lettere che compaiono nella parte letterale di A sono maggiori o uguali a quelli delle corrispondenti lettere che compaiono nella parte letterale del monomio B.

M.C.D. tra monomi

Definizione

Il **massimo comun divisore** (**M.C.D.**) di due o più monomi è il massimo tra tutti i divisori comuni dei monomi considerati e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta, col minore esponente.

Esempio

Determinare il M.C.D. dei monomi $12x^2yz^2t$; $4x^3y^2z$; $2xy^4z^3t^2$.

Il massimo comun divisore dei coefficienti numerici è 2, mentre la parte letterale del monomio cercato è xyz.

Monomi primi tra loro

Definizione

Due monomi sono **primi tra loro** se il loro massimo comun divisore è 1.

Esempio

I monomi $7x^3y$ e $5zt^2$ sono primi tra loro.

Osservazione

Due monomi primi tra loro sono tali che i loro coefficienti numerici siano primi tra loro e non abbiano alcuna lettera in comune.

m.c.m. tra monomi

Definizione

Il **minimo comune multiplo (m.c.m.)** di due o più monomi è il minimo tra tutti i multipli comuni dei monomi considerati e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori comuni e non comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta, col maggiore esponente.

Esempio

Determinare il m.c.m. dei monomi $12x^2yz^2t$; $4x^3y^2z$; $2xy^4z^3t^2$.

Il minimo comune multiplo dei coefficienti numerici è 12, mentre la parte letterale del monomio cercato è $x^3y^4z^3t^2$.

Esercizi

Esercizio 1

- Scrivere due monomi di sesto grado non simili e contenenti le lettere a e b.
- Scrivere due monomi non simili di grado 8 ciascuno dei quali sia il quadrato di un monomio.

Esercizio 2

Risolvere le seguenti espressioni:

- $\left[12a^4 : (8a^2 - 5a^2) + (-2a)^2\right] \cdot \left(\frac{1}{2}ab^2\right)^3 : (-4a^3b^4)$
- $\left[\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^5 : \left(\frac{4}{9}xy\right)^3\right]^2 : \left(y^2\right)^5 + \frac{3}{2}x^6y^3 : \left(\frac{1}{2}x^2y\right)^2 \cdot \left(x^2y^3\right) - \frac{33}{2}\left(x^2y^2\right)^2$