

Costruzioni con riga e compasso



Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" - Palermo
Prof.re E. Modica

I 5 postulati di Euclide

Si postula che:

- 1) Per due punti distinti qualsiasi sia possibile tracciare una ed una sola retta.
- 2) Si possa prolungare un segmento indefinitamente.
- 3) Dato un punto e una lunghezza, sia possibile tracciare un cerchio che ha per centro quel punto e per raggio quella lunghezza.
- 4) Tutti gli angoli retti siano uguali.
- 5) Data una retta ed un punto esterno ad essa, sia possibile tracciare per quel punto una ed una sola parallela alla retta data.

Importanza storica

- Le costruzioni con riga e compasso sono al centro della matematica greca.
- I **primi 3 postulati degli Elementi di Euclide** in un certo senso stabiliscono l'**esistenza della riga non graduata e del compasso** e dettano le regole con cui si possono usare.
- Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano nella **forma costruttiva**. La 1° proposizione degli Elementi di Euclide ci presenta subito un problema costruttivo: "Sopra un segmento costruire un triangolo equilatero".
- Ogni costruzione con riga e compasso equivale, in ultima analisi, a una **dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto costruito a partire dai postulati di Euclide**.

Cosa vuol dire costruire con riga e compasso?

Eeguire una costruzione con riga e compasso significa tracciare rette, semirette, segmenti e circonferenze **servendosi esclusivamente di una riga e di un compasso ideali** ossia:

- 1) **riga infinita non graduata** (non si può far riferimento alle tacche della riga per prendere misure).
- 2) **compasso collassabile** (si richiude su se stesso appena viene staccata la punta dal foglio).

Operazioni grafiche permesse

Le **operazioni grafiche di base permesse dagli Elementi** sono esclusivamente le seguenti:

- dati due punti, tracciare il segmento o la semiretta o la retta passante per essi (per estensione, prolungare un segmento); **I e II POSTULATO**
- dato un punto O e una lunghezza AB , tracciare una circonferenza di centro O e raggio AB ; **III POSTULATO**
- determinare il punto di intersezione di due rette;
- determinare i punti d'intersezione di una circonferenza con una retta;
- determinare i punti d'intersezione di due circonferenze.








Osservazione

Si deve **prescindere dai materiali utilizzati e dai livelli di approssimazione degli strumenti** meccanici: la scienza delle costruzioni con riga e compasso è rigorosamente teorica e non pratica.

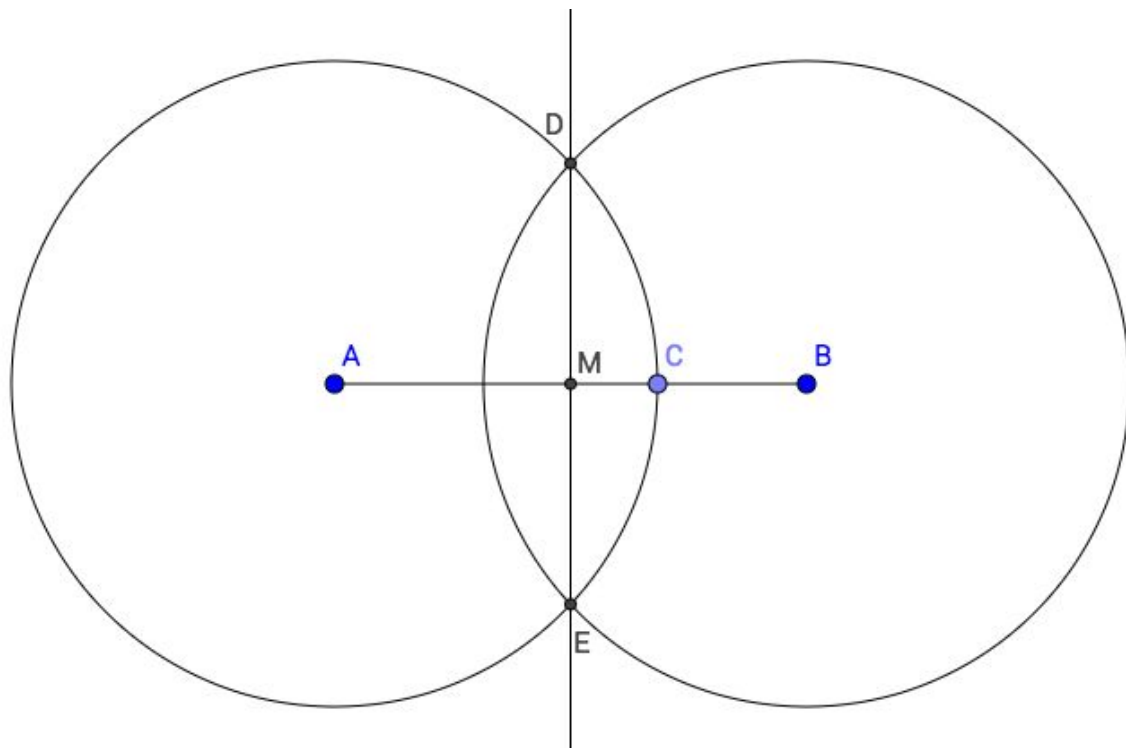
Punto medio di un segmento e asse del segmento

- 1) Traccia un segmento di estremi A e B (**Postulato 1**)
- 2) Traccia una circonferenza puntando il compasso in A, con apertura maggiore della lunghezza della metà del segmento (**Postulato 3**)
- 3) Ripeti la stessa operazione, mantenendo la stessa apertura del compasso e puntandolo in B (**Postulato 3**)
- 4) Le circonferenze si intersecano in due punti: chiamali C e D
- 5) Traccia la retta CD, che è l'asse del segmento AB e lo interseca nel suo punto medio M (**Postulato 2 e Postulato 3**)

Punto medio di un segmento e asse del segmento

- ④ Traccia il  segmento AB
- ④ Posiziona su AB un punto  C, che dista da A più della metà della lunghezza di AB
- ④ Con lo strumento  compasso, seleziona A e C, che definiscono il raggio della circonferenza da tracciare, quindi il punto A, centro della circonferenza
- ④ Ripeti il procedimento facendo clic nuovamente su A e C, quindi sul centro B
- ④ Determina i punti di  intersezione D ed E, facendo clic sulle due circonferenze
- ④ Traccia la  retta DE
- ④ Determina il punto di  intersezione F di DE e AB, che è il punto medio di AB
- ④ Rinomina F in M: fai clic sul punto F con il tasto destro del mouse, seleziona  *Rinomina* e digita M

Punto medio di un segmento e asse del segmento



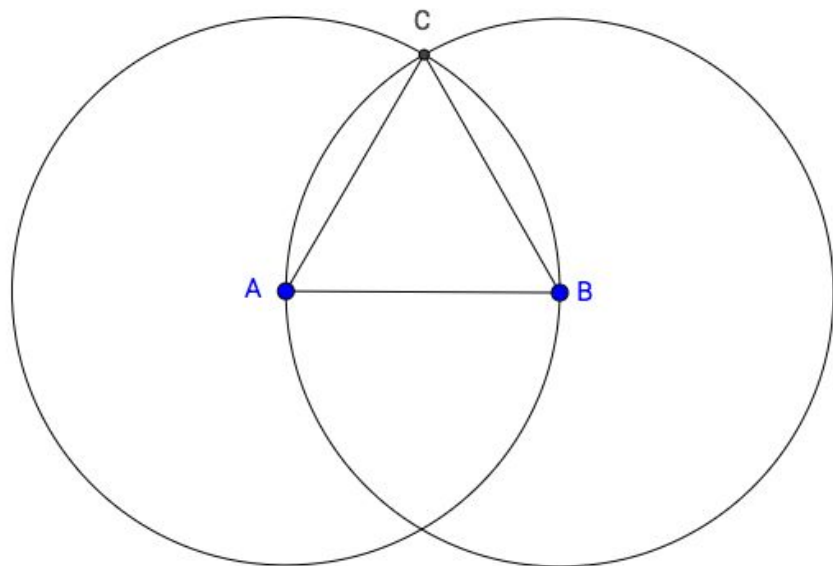
Proposizione 1, Libro I degli Elementi

Data una retta finita, [è possibile] costruire su di essa un triangolo equilatero.

Costruzione del triangolo equilatero

- 1) Traccia il segmento di estremi A e B (**Postulato 1**)
- 2) Con centro del compasso in ciascuno dei due estremi A e B e apertura AB, traccia due circonferenze (**Postulato 3**)
- 3) Considera uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze e indicalo con la lettera C
- 4) Unisci il punto C con A e con B (**Postulato 1**)

Costruzione triangolo equilatero



⋮	Nome	Descrizione
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Circonferenza c	Circonferenza per B di centro A
5	Circonferenza d	Circonferenza per A di centro B
6	Punto C	Punto di intersezione tra c e d
6	Punto D	Punto di intersezione tra c e d
7	Segmento g	Segmento [A, C]
8	Segmento h	Segmento [B, C]

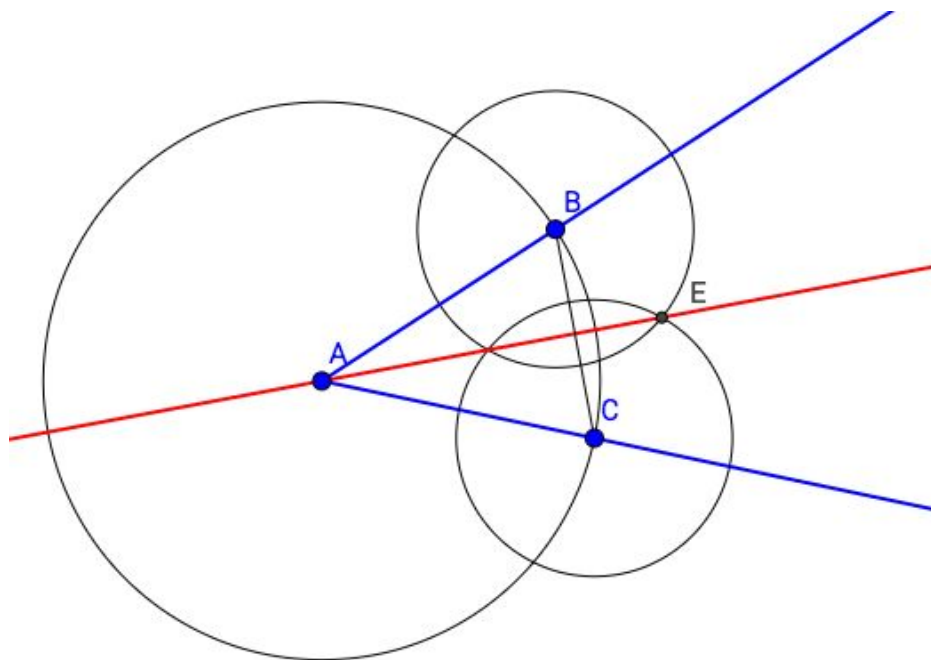
Si tratta realmente di un triangolo equilatero?

- 1) $AC = AB$ (Definizione di “raggio”)
- 2) $BC = AB$ (Definizione di “raggio”)
- 3) $AC = BC$ (Per le due precedenti e per la Noz. com. 1)
- 4) ABC è un triangolo equilatero (Per le 3 precedenti e per la definizione di “triangolo equilatero”)
- 5) Quindi, dato un segmento, è possibile costruire su di esso un triangolo equilatero.

Bisettrice di un angolo dato

- 1) Sia dato un angolo di vertice A
- 2) Tracciare con il compasso, con un'apertura qualsiasi, un arco che individua sui lati dell'angolo due punti B e C (**Postulato 3**)
- 3) La bisettrice dell'angolo dato è proprio l'asse del segmento BC
- 4) Eseguire la costruzione dell'asse del segmento BC

Bisettrice di un angolo dato










⋮	Nome	Descrizione
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Semiretta f	Semiretta per A e B
4	Punto C ₁	
5	Semiretta g	Semiretta per A e C ₁
6	Circonferenza c	Circonferenza per B di centro A
7	Punto C	Punto di intersezione tra c e g
8	Segmento h	Segmento [B, C]
9	Punto D	Punto su h
10	Circonferenza d	Circonferenza di centro B e raggio Segmento[B, D]
11	Circonferenza e	Circonferenza di centro C e raggio Segmento[B, D]
12	Punto E	Punto di intersezione tra d e e
12	Punto F	Punto di intersezione tra d e e
13	Retta i	Retta per E e F

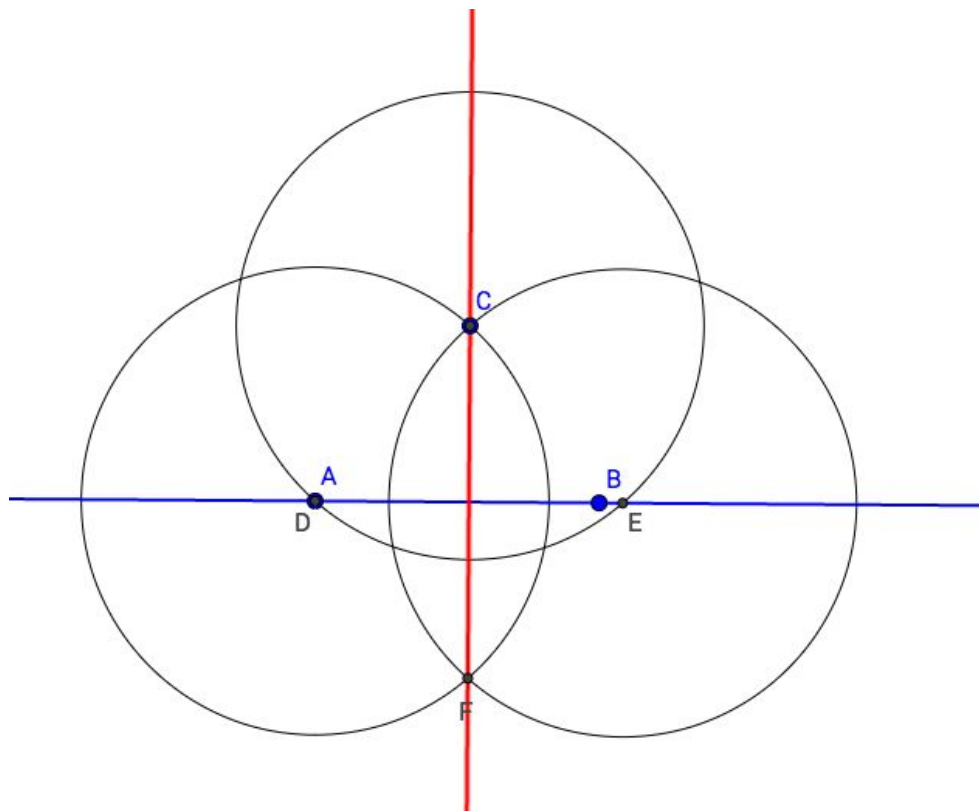
Perpendicolare a una retta, passante per un punto C esterno a essa

- 1) Traccia la retta passante per due punti qualsiasi A e B, e un punto C non appartenente alla retta (**Postulato 1**)
- 2) Traccia la circonferenza di centro C e raggio CA, che interseca la retta AB in A ed E (**Postulato 3**)
- 3) Traccia la circonferenza di centro E e raggio EC, quindi la circonferenza di centro A e raggio CA (**Postulato 3**)
- 4) Le due circonferenze si intersecano in C ed F
- 5) Traccia la retta CF, che è la perpendicolare alla retta AB, passante per C (**Postulato 2**)

Perpendicolare a una retta, passante per un punto C esterno a essa

- Traccia la  retta AB
- Posiziona nel piano un punto  C, non appartenente alla retta AB
- Con lo strumento  compasso seleziona A e C, che definiscono il raggio della circonferenza da tracciare, quindi il punto C, centro della circonferenza
- Determina i punti di  intersezione D ed E tra circonferenza e retta, facendo clic sulla retta e sulla circonferenza (uno dei due punti coinciderà con A)
- Con lo strumento  compasso traccia la circonferenza di centro E e raggio EC, quindi la circonferenza di centro A e raggio CA
- Determina i punti di  intersezione C ed F tra le due circonferenze
- Traccia la  retta CF, che è la perpendicolare alla retta AB passante per C

Perpendicolare a una retta, passante per un punto C esterno a essa











⋮	Nome	Descrizione
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Retta f	Retta per A e B
4	Punto C	
5	Circonferenza c	Circonferenza di centro C e raggio Segmento[A, C]
6	Punto D	Punto di intersezione tra c e f
6	Punto E	Punto di intersezione tra c e f
7	Circonferenza d	Circonferenza di centro E e raggio Segmento[E, C]
8	Circonferenza e	Circonferenza di centro A e raggio Segmento[C, A]
9	Punto F	Punto di intersezione tra d e e
9	Punto G	Punto di intersezione tra d e e
10	Retta g	Retta per C e F

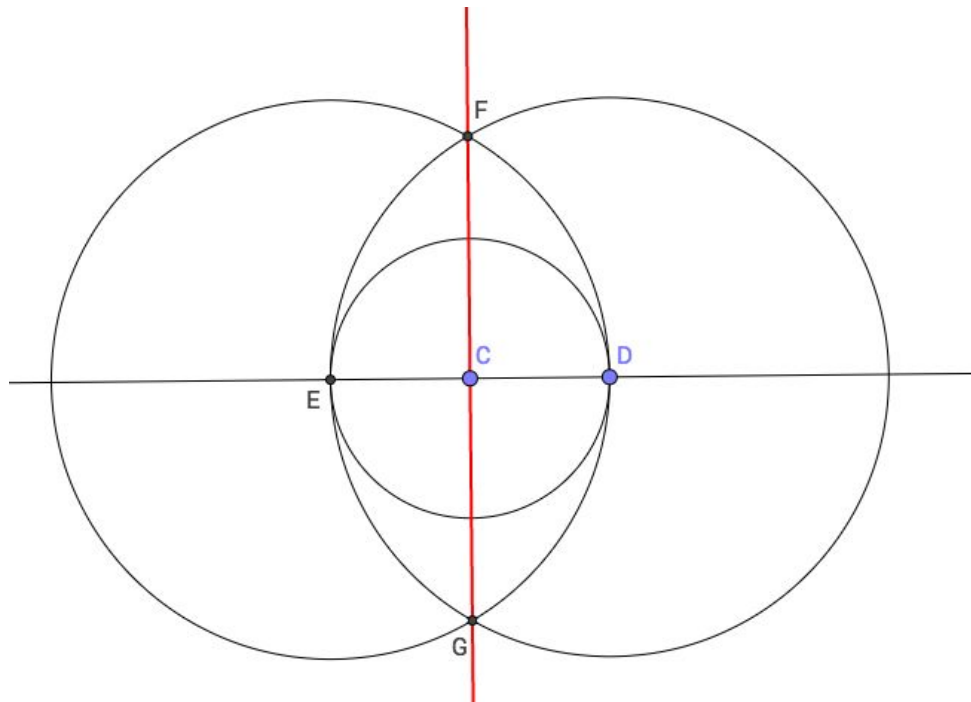
Perpendicolare a una retta, passante per un punto C sulla retta

- 1) Traccia la retta passante per due punti qualsiasi A e B, e un punto C appartenente alla retta (**Postulato 1**)
- 2) Posiziona un punto D sulla retta, quindi traccia la circonferenza di centro C e raggio CD (**Postulato 3**)
- 3) La circonferenza interseca la retta in due punti: D ed E
- 4) Traccia la circonferenza di centro D e raggio ED, quindi la circonferenza di centro E e raggio ED (**Postulato 3**)
- 5) Etichetta F,G i punti di intersezione delle due circonferenze
- 6) Traccia la retta FG, che è la perpendicolare alla retta AB, passante per C (**Postulato 2**)

Perpendicolare a una retta, passante per un punto C sulla retta

- ④ Traccia la  retta AB (nascondi i punti A e B) e posiziona sulla retta un punto  C
- ④ Posiziona sulla retta un punto  D e con lo strumento  compasso seleziona C e D, che definiscono il raggio della circonferenza da tracciare, quindi il punto C, centro della circonferenza
- ④ Determina i punti di  intersezione E ed F tra circonferenza e retta, facendo clic sulla circonferenza e sulla retta (uno dei due punti coinciderà con D)
- ④ Utilizzando lo strumento  compasso, traccia la circonferenza di raggio ED e centro D, e la circonferenza di raggio ED e centro E
- ④ Determina i punti di  intersezione F e G tra le due circonferenze
- ④ Traccia la  retta FG, che è la perpendicolare alla retta AB passante per C

Perpendicolare a una retta, passante per un punto C sulla retta

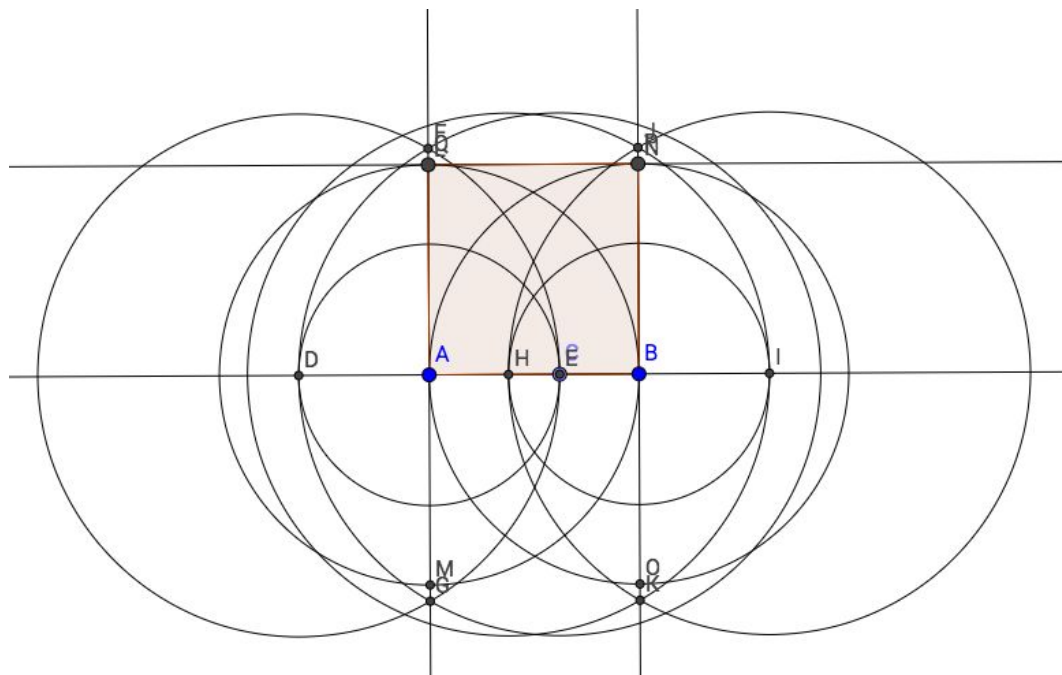


¶	Nome	Descrizione
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Retta f	Retta per A e B
4	Punto C	Punto su f
5	Punto D	Punto su f
6	Circonferenza c	Circonferenza di centro C e raggio Segmento[C, D]
7	Punto E	Punto di intersezione tra c e f
7	Punto T	Punto di intersezione tra c e f
8	Circonferenza d	Circonferenza di centro D e raggio Segmento[E, D]
9	Circonferenza e	Circonferenza di centro E e raggio Segmento[E, D]
10	Punto F	Punto di intersezione tra e e d
10	Punto G	Punto di intersezione tra e e d
11	Retta g	Retta per F e G

Costruzione del quadrato di lato dato

- 1) Traccia la retta passante per due punti qualsiasi A e B (**Postulato 1**)
- 2) Costruisci la retta perpendicolare ad AB in A
- 3) Costruisci la retta perpendicolare da AB in B
- 4) Centrando il compasso in ciascuno dei due estremi, riporta sulle rispettive perpendicolari la lunghezza di AB (**Postulato 3**)
- 5) Segna con C e D i punti trovati.
- 6) Traccia il segmento di estremi C e D (**Postulato 2**)

Costruzione del quadrato di lato dato



Nome	Descrizione
1 Punto A	
2 Punto B	
3 Retta f	Retta per A e B
4 Punto C	Punto su f
5 Circonferenza c	Circonferenza di centro A e raggio Segmento[A, C]
6 Punto D	Punto di intersezione tra c e f
6 Punto E	Punto di intersezione tra c e f
7 Circonferenza d	Circonferenza di centro D e raggio Segmento[D, C]
8 Circonferenza e	Circonferenza di centro C e raggio Segmento[C, D]
9 Punto F	Punto di intersezione tra d e e
9 Punto G	Punto di intersezione tra d e e
10 Retta g	Retta per F e G
11 Circonferenza h	Circonferenza di centro B e raggio Segmento[A, C]
12 Punto H	Punto di intersezione tra h e f
12 Punto I	Punto di intersezione tra h e f
13 Circonferenza k	Circonferenza di centro I e raggio Segmento[H, I]
14 Circonferenza p	Circonferenza di centro H e raggio Segmento[H, I]
15 Punto J	Punto di intersezione tra p e k
15 Punto K	Punto di intersezione tra p e k
16 Retta i	Retta per J e K
17 Circonferenza q	Circonferenza di centro A e raggio Segmento[A, B]
18 Circonferenza r	Circonferenza di centro B e raggio Segmento[A, B]
19 Punto L	Punto di intersezione tra q e g
19 Punto M	Punto di intersezione tra q e g
20 Punto N	Punto di intersezione tra r e i
20 Punto O	Punto di intersezione tra r e i
21 Retta j	Retta per L e N
22 Poligono poli1	Poligono[A, B, 4]
22 Punto P	Poligono[A, B, 4]
22 Punto Q	Poligono[A, B, 4]
22 Segmento l	Segmento [A, B] di Poligono poli1