Proporzioni e percentuali

E. MODICA

LICEO SCIENTIFICO STATALE "S. CANNIZZARO"

Problema

Una tua amica ti dà delle dosi per l'impasto della pizza per 3 persone:

1. 500 g di farina di tipo 00
2. 30 g di lievito di birra
3. 45 g di olio EVO
4. 1 dL di acqua tiepida
5. sale q.b.

Volendo preparare la pizza per 7 amici, quali sono le dosi nuove per l'impasto?

Cos’è un rapporto?

10 kg di pasta costano 8 euro. Qual è il prezzo della pasta al kilogrammo?

È sufficiente effettuare la divisione seguente:

$$8\,€ : 10\,kg = \frac{8\,€}{10\,kg} = 0{,}8\,\frac{€}{kg}$$

cioè 0,8 € per ogni kilogrammo.

Praticamente, un **rapporto** fornisce quindi un’informazione relativa a un’unità e consente di determinare il valore unitario di una grandezza.

Matematicamente, il ***rapporto*** fra due numeri *a* e *b*, preso in un certo ordine, è il quoziente della divisione fra il primo di essi e il secondo:

$$\frac{a}{b}$$

Come varia un rapporto?

Se si fissa il denominatore di un rapporto, aumentando il numeratore, allora aumenta il rapporto.

$$\frac{a\uparrow}{b} = r\uparrow$$

Esempio: $\frac{60}{10} = 6$ $\frac{80}{10} = 8$ $\frac{100}{10} = 10$

Se si fissa il numeratore di un rapporto, aumentando il denominatore, allora diminuisce il rapporto.

$$\frac{a}{b\uparrow} = r\downarrow$$

Esempio: $\frac{60}{2} = 30$ $\frac{60}{5} = 12$ $\frac{60}{10} = 6$

Proporzioni

Definizione. Si definisce ***proporzione*** l'uguaglianza di due rapporti, cioè:

$$\boldsymbol{a : b = c : d}$$

Per indicare i termini di una proporzione si utilizza la seguente terminologia:

- i termini *a* e *c* prendono il nome di ***antecedenti***;
- i termini *b* e *d* prendono il nome di ***conseguenti***;
- i termini *a* e *d* prendono il nome di ***estremi***;
- i termini *b* e *c* prendono il nome di ***medi***.

Definizione. Una proporzione si dice ***continua*** se ha i medi uguali e ciascuno dei due medi uguali prende il nome di ***medio proporzionale***.

$$\boldsymbol{a : b = b : c}$$

Esempio. La proporzione $4 : 6 = 6 : 9$ è continua e il numero 6 è il medio proporzionale.

Proprietà fondamentale delle proporzioni

***In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi*.**

Esempio. Nella proporzione:

$$5:10 = 15:30$$

il prodotto dei medi è $10 \cdot 15 = 150$, mentre il prodotto degli estremi è $5 \cdot 30 = 150$.

Proprietà dell’invertire

In ogni proporzione, se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

Esempio. Nella proporzione:

$$5:10 = 15:30$$

se si applica la proprietà dell’invertire si ottiene l’uguaglianza tra rapporti:

$$10:5 = 30:15$$

che è ancora una proporzione.

Proprietà del permutare

In ogni proporzione, se si scambiano fra loro i medi oppure gli estremi, si ottiene ancora una proporzione.

Esempio. Nella proporzione:

$$5:10 = 15:30$$

se si applica la proprietà del permutare si ottiene l'uguaglianza tra rapporti:

$$30:10 = 15:5$$

che è ancora una proporzione.

Proprietà del comporre

In ogni proporzione la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) come la somma del terzo e del quarto sta al terzo (o al quarto).

Esempio. Nella proporzione:

$$30:15 = 10:5$$

se si applica la proprietà del comporre si ottiene l'uguaglianza tra rapporti:

$$(30 + 15):15 = (10 + 5):5$$

cioè:

$$45:15 = 15:5$$

che è ancora una proporzione.

Proprietà dello scomporre

In ogni proporzione che ha gli antecedenti maggiori dei conseguenti, la differenza fra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo) come la differenza fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto).

Esempio. Nella proporzione:

$$30:15 = 10:5$$

se si applica la proprietà dello scomporre si ottiene l'uguaglianza tra rapporti:

$$(30 - 15):30 = (10 - 5):10$$

cioè:

$$15:30 = 5:10$$

che è ancora una proporzione.

Calcolo del termine incognito

Data una proporzione contenente un termine incognito è possibile calcolarlo mediante la proprietà fondamentale delle proporzioni. Infatti:

- se **il termine incognito è un medio** basta dividere il prodotto degli estremi per il medio noto, cioè:

$$a : b = x : c \quad \rightarrow \quad x = \frac{ac}{b}$$

- se **il termine incognito è un estremo** basta dividere il prodotto dei medi per l'estremo noto, cioè:

$$a : b = c : x \quad \rightarrow \quad x = \frac{bc}{a}$$

- se **il termine incognito è il medio proporzionale** basta calcolare la radice quadrata del prodotto degli estremi, cioè:

$$a : x = x : b \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{ab}$$

Esercizi

1) Un cartolaio compra 80 quaderni e paga € 65. Quanto pagherà per l'acquisto di 100 quaderni?

2) Da una statistica è emerso che 2 persone su 10 non sono mai state a Roma. Su 4520 persone intervistate, quante non sono mai state a Roma?

3) Se in una ricetta sono previsti 700 g di farina e 0,4 g di lievito, quanto lievito dovrò aggiungere a 2500 g di farina.

4) In un liceo, il rapporto fra chi ama la matematica e chi ama la lingua inglese è di 3:16. Sapendo che gli iscritti al liceo sono 1700, quanti amano la matematica e quanti l'inglese?

5) Un'automobile percorre mediamente 23 km con un litro di benzina. Quanti litri di benzina occorrono per percorrere in media 100 km?

6) Scomporre il numero 120 in parti che stiano tra loro come i numeri 3, 4 e 5.

7) Applicando opportunamente le proprietà del comporre e dello scomporre, determinare i termini incogniti nelle seguenti proporzioni:

$x : y = 5 : 2$ sapendo che $x + y = 14$

$x : y = 7 : 3$ sapendo che $x + y = 20$

$x : y = 8 : 5$ sapendo che $x - y = 6$

$x : y = 11 : 9$ sapendo che $x - y = 8$

$x : y = 9 : 7$ sapendo che $x + y = 32$

Numeri percentuali

Si definisce ***numero percentuale*** un numero che viene riferito al valore fisso 100 e in genere si indica facendolo seguire dal simbolo *%,* che si legge «*percento*».

Per *trasformare un numero percentuale in un numero decimale* basta dividere il numero per 100, per esempio:

$$12{,}3\% = \frac{12{,}3}{100} = 0{,}123$$

Se invece si vuole trasformare un *numero decimale in un numero percentuale* basta riscrivere la frazione con 100 a denominatore. Ad esempio:

$$0{,}12 = 0{,}12 \cdot \frac{100}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$$

Esempio 1

Calcolare il 20% di 80.

Poiché

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

si ha che:

$$20\%\ di\ 80 = \frac{1}{5} \cdot 80 = 16$$

Esempio 2 (Metodo 1)

Il prezzo di un maglione è di 125€ e in periodo di saldi viene applicato uno sconto del 30%. Qual è il prezzo scontato del maglione?

<u>Metodo 1</u>

Si determina il 30% di 125, cioè:

$$125 \cdot \frac{30}{100} = 37{,}5$$

Si sottrae tale cifra dal prezzo del maglione, ossia:

$$125 - 37{,}5 = 87{,}5$$

Il prezzo del maglione dopo lo sconto è pari a 87,5 euro.

Esempio 2 (Metodo 2)

Il prezzo di un maglione è di 125€ e in periodo di saldi viene applicato uno sconto del 30%. Qual è il prezzo scontato del maglione?

<u>Metodo 2</u>

Essendo lo sconto pari al 30%, il prezzo del maglione dopo lo sconto sarà pari al:

$$100\% - 30\% = 70\%$$

del prezzo di partenza. Quindi si ha:

$$125 \cdot \frac{70}{100} = 87{,}5$$

Il prezzo del maglione dopo lo sconto è pari a 87,5 euro.

Esempio 3 (Metodo 1)

In una classe formata da 25 alunni, solo 6 hanno avuto la sufficienza in matematica. Qual è la percentuale degli studenti che hanno avuto la sufficienza sul totale?

Metodo 1

- La frazione che esprime la percentuale è pari a $\frac{6}{25}$.
- Si considera la frazione a essa equivalente che ha come denominatore 100, cioè $\frac{24}{100}$.
- La percentuale cercata è 24%.

Esempio 3 (Metodo 2)

In una classe formata da 25 alunni, solo 6 hanno avuto la sufficienza in matematica. Qual è la percentuale degli studenti che hanno avuto la sufficienza sul totale?

Metodo 2

Basta impostare la seguente proporzione:

$$6 : 25 = x : 100$$

da cui segue che:

$$x = \frac{100 \cdot 6}{25} = 24$$

La percentuale cercata è 24%.

Esempio 4

Un paio di jeans, dopo aver subito uno sconto del 25%, viene venduto a 85 euro. Qual era il prezzo prima dello sconto?

Essendo lo sconto pari al 25%, il prezzo del jeans dopo lo sconto è pari al $100\% - 25\% = 75\%$ di quello di partenza. Impostando la proporzione otteniamo:

$$85 : 75 = x : 100$$

da cui segue che:

$$x = \frac{85 \cdot 100}{75} = 113{,}3$$

Il prezzo di partenza era quindi pari a 113,3 euro.

Esempio 5

Il prezzo di una cyclette era di 350 euro e durante il periodo di saldi è stata venduta a 280 euro. Quale sconto percentuale è stato applicato?

Calcoliamo lo sconto effettuato:

$$€\,350 - €\,280 = €\,70$$

Impostando la seguente proporzione:

$$70 : 350 = x : 100$$

si ottiene:

$$x = \frac{70 \cdot 100}{350} = 20$$

Lo sconto applicato è del 20%.

Esercizi

Esercizio 1. La tua paghetta settimanale ammonta a 14 euro. Sapendo che è stata aumentata del 12%, a quanto ammontava in precedenza? [R. € 12,5]

Esercizio 2. Gli argomenti di algebra del libro di testo coprono il 65% di tutto il libro. Sapendo che le pagine dedicate alla geometria sono 119, quante pagine ha in totale il libro? [R. 340 pagine]