NUMERI NATURALI

Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro"
Prof.re E. Modica

PROPRIETÀ DELL'INSIEME $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$

- Limitato inferiormente (dallo 0)
- Illimitato superiormente
- Ogni elemento ammette un successivo ($\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$)
- Ogni elemento, eccetto lo zero, ammette un precedente ($\forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \Longrightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$)
- Totalmente ordinato, ossia comunque si scelgano due numeri naturali è sempre possibile confrontarli
- Discreto, ossia tra un numero naturale e il suo successivo non sono presenti altri numeri naturali ($\forall n, n + 1 \in \mathbb{N} \nexists x \in \mathbb{N}: n < x < n + 1$)

$\mathbb{N}$

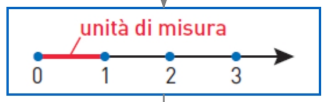
Insieme dei **numeri naturali**

contiene infiniti elementi

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

si può rappresentare

su una **semiretta orientata** con origine in 0



$\mathbb{N}$

è un **insieme ordinato**

Operazioni e terminologia

OPERAZIONE	SIMBOLO	TERMINOLOGIA	TIPO OPERAZIONE in
Addizione	+	addendi $3 + 4 = 7$ somma	Operazione **interna**
Sottrazione	—	minuendo differenza $13 - 2 = 11$ sottraendo	Operazione **NON interna**
Moltiplicazione	· oppure ×	fattori $5 \cdot 9 = 45$ prodotto	Operazione **interna**
Divisione	:	dividendo quoziente $48 : 6 = 8$ divisore	Operazione **NON interna**

supermappe.it
fatto con SuperMappe

Proprietà dell'addizione (+)

addendi

$$3 + 4 = 7$$

somma

NOME	A PAROLE	FORMULA	ESEMPIO
Proprietà **commutativa**	**Cambiando l'ordine** degli addendi, **la somma non cambia**.	$a + b = b + a$	$3 + 2 = 2 + 3$
Proprietà **associativa**	**La somma** di tre numeri **non cambia** se **associamo diversamente gli addendi**.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(5 + 9) + 1 = 5 + (9 + 1)$

fatto con SuperMappe

Proprietà dello zero

Lo zero, addizionato a qualsiasi numero naturale, lo lascia invariato. In formule:

$$n + 0 = 0 + n = n$$

Per tale ragione prende il nome di **elemento neutro** rispetto all'addizione.

Proprietà della sottrazione (–)

minuendo differenza

$$13 - 2 = 11$$

sottraendo

NOME	A PAROLE	FORMULA	ESEMPIO
Proprietà **invariantiva**	**La differenza** fra due numeri **non cambia** se a ognuno si **aggiunge** o si **toglie** lo **stesso numero**.	$a - b = (a + c) - (b + c)$ $a - b = (a - c) - (b - c)$	$32 - 4 = (32 + 6) - (4 + 6)$ $24 - 7 = (24 - 4) - (7 - 4)$

supermappe.it
fatto con SuperMappe

Proprietà dello zero

La differenza tra due numeri naturali uguali è pari a zero:

$$n - n = 0$$

Se lo 0 è il sottraendo, allora si ha:

$$n - 0 = n$$

Lo 0 non può essere considerato elemento neutro rispetto all'addizione, in quanto non può prendere il posto del minuendo. Infatti: $0 - n \notin \mathbb{N}$.

Proprietà della moltiplicazione (· oppure ×)

fattori

$$5 \cdot 9 = 45$$

prodotto

NOME	A PAROLE	FORMULA	ESEMPIO
Legge di **annullamento del prodotto**	Il **prodotto** di due fattori **è 0 se e solo se almeno uno** dei fattori **è 0.**	$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0$ oppure $b = 0$	
Proprietà **commutativa**	**Cambiando l'ordine** dei fattori, **il prodotto non cambia.**	$a \cdot b = b \cdot a$	$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$
Proprietà **associativa**	**Il prodotto** di tre numeri **non cambia** se **associamo diversamente i fattori.**	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)$
Proprietà **distributiva** rispetto all'**addizione**	Il **prodotto** di un **numero per una somma è uguale alla somma dei prodotti** fra il numero e ognuno degli addendi.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ distributiva a sinistra $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ distributiva a destra	$5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3$ distributiva a sinistra $(4 + 5) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2$ distributiva a destra
Proprietà **distributiva** rispetto alla **sottrazione**	Il **prodotto** di un **numero per una differenza** è uguale **alla differenza dei prodotti** fra il numero e il minuendo e il numero e il sottraendo.	Con $b \leq a$: $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$ distributiva a sinistra $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ distributiva a destra	$3 \cdot (7 - 1) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 1$ distributiva a sinistra $(12 - 3) \cdot 2 = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2$ distributiva a destra

supermappe.it
fatto con SuperMappe

Proprietà dello zero

Lo zero, moltiplicato a qualsiasi numero naturale, rende il prodotto pari a 0. In formule:

$$n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$$

Per tale ragione prende il nome di **elemento assorbente** rispetto alla moltiplicazione.

Proprietà della divisione (:)

dividendo quoziente

$$48 : 6 = 8$$

divisore

NOME	A PAROLE	FORMULA	ESEMPIO
Proprietà **invarantiva**	Il **quoziente** fra due numeri **non cambia** se ognuno viene **moltiplicato** o **diviso** **per uno stesso numero** diverso da 0	$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ $a : b = (a : c) : (b : c)$	$120 : 40 = (120 \cdot 5) : (40 \cdot 5)$ $480 : 20 = (480 : 2) : (20 : 2)$
Proprietà **distributiva** rispetto all' **addizione**	Il **quoziente** tra **una somma** e un **numero è uguale alla somma dei quozienti** fra gli addendi e il divisore.	Con $c \neq 0$ e quando le divisioni sono possibili: $(a + b) : c = a : c + b : c$	$(6 + 8) : 2 = 6 : 2 + 8 : 2$
Proprietà **distributiva** rispetto alla **sottrazione**	Il **quoziente** tra **una differenza** e un **numero è uguale alla differenza tra il quoziente** di minuendo e divisore e il quoziente di sottraendo e divisore.	Con $c \neq 0$ e quando le sottrazioni e le divisioni sono possibili: $(a - b) : c = a : c - b : c$	$(15 - 9) : 3 = 15 : 3 - 9 : 3$

supermappe.it
fatto con SuperMappe

Proprietà dello zero

Comunque si scelga un numero naturale n, si ha:

1) $0 : n$ è **uguale** a 0

2) $0 : 0$ è **indeterminato**, in quanto non c'è un preciso risultato

3) $n : 0$ è **impossibile**, in quanto non dà alcun risultato

PROBLEMA

In una coltura i batteri si moltiplicano molto velocemente: ogni mezz'ora si ha la scissione di un batterio in due nuovi batteri. Quanti batteri hanno avuto origine da un batterio in due ore?

CHE COS'È UN MODELLO MATEMATICO?

- Un **modello matematico** del reale è la descrizione quantitativa di fenomeni o di sistemi e della loro evoluzione, effettuata tramite l'uso del linguaggio e delle regole matematiche.
- I modelli matematici sono molto usati nell'ambito della fisica, delle scienze naturali, dell'ingegneria e delle scienze sociali.
- I criteri con cui viene formulato un modello sono suggeriti dalle osservazioni sperimentali e, una volta tradotto il problema nel linguaggio matematico, lo si studia con gli strumenti che caratterizzano tale disciplina.
- Un modello matematico descrive, quindi, l'evoluzione di un fenomeno o di un sistema: fornendo dei dati in ingresso (**input**) il modello restituisce dei dati in uscita (**output**). Il modello sarà quindi **efficace** se l'*output* è prossimo alle misurazioni effettuate nell'osservazione del fenomeno reale.

TIPOLOGIE DI MODELLI MATEMATICI

- ***Statici***: viene fotografato il fenomeno o il sistema a un certo istante preciso
- ***Dinamici***: tengono in considerazione la variabilità del fenomeno o del sistema fisico nel tempo
- ***Deterministici***: l'output è univocamente determinato dai dati di input
- ***Stocastici***: tengono conto delle possibili variazioni dei dati di input e che forniscono output in termini probabilistici
- ***Lineari***: sono rappresentati da equazioni lineari
- ***Non lineari***: sono rappresentati da equazioni non lineari
- ***Caotici***: una variazione dell'input produce una forte variazione dell'output

IMPORTANZA DEI MODELLI MATEMATICI

- Effettuare previsioni sullo stato **futuro** di un sistema fisico.
- Agire sul sistema fisico tentando di **modificarne** l'evoluzione.
- Indagare circa le **proprietà** del fenomeno o del sistema fisico.

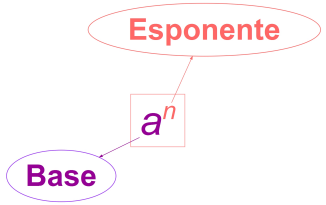
Potenze

Definizione

- n>1: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ — Esempio: $3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ volte}} = 81$ (tre alla quarta si legge)
- $a^1 = a$ — Esempio: $9^1 = 9$
- $a \neq 0$: $a^0 = 1$ — Esempio: $26^0 = 1$

Proprietà

	NOME	FORMULA	ESEMPIO	A PAROLE
1	**Prodotto** (·) di potenze con la **stessa base**	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$	È una **potenza** che ha: - come **base** la **stessa base** - come **esponente** la **somma** (+) degli **esponenti**
2	**Quoziente** (:) di potenze con la **stessa base**	$a^m : a^n = a^{m-n}$ con $a \neq 0$ e $n \leq m$	$12^5 : 12^3 = 12^{5-3} = 12^2$	È una **potenza** che ha: - come **base** la **stessa base** - come **esponente** la **differenza** (-) degli **esponenti**
3	**Potenza** di **potenza**	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$	È una **potenza** che ha: - come **base** la **stessa base** - come **esponente** il **prodotto** (·) degli **esponenti**
4	**Prodotto** (·) di potenze con lo **stesso esponente**	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$4^2 \cdot 5^2 = (4 \cdot 5)^2 = 20^2$	È una **potenza** che ha: - come **base** il **prodotto** (·) delle **basi** - come **esponente** lo stesso **esponente**
5	**Quoziente** (:) di potenze con lo **stesso esponente**	$a^m : b^m = (a : b)^m$ con $b \neq 0$ a divisibile per b	$6^3 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2$	È una **potenza** che ha: - come **base** il **quoziente** (:) delle **basi** - come **esponente** lo stesso **esponente**



supermappe.it
fatto con SuperMappe

Proprietà dello zero

1) $0^n = 0$ purché $n \neq 0$
2) 0^0 è una potenza indeterminata, in quanto non dà un preciso risultato
3) $n^0 = 1$ purché $n \neq 0$

PROBLEMA

Qual è il numero massimo di CD che è possibile acquistare con 50 euro se ciascuno di essi costa 14 euro? Quanti euro rimangono dopo l'acquisto?

TEOREMA (ELEMENTI DI EUCLIDE, VII LIBRO)

Siano $a, b \in \mathbb{N}$, con $a \geq b$ e $b \neq 0$. Esistono e sono unici due numeri naturali q, detto **quoziente**, e r, detto **resto**, tali che:

$$a = q \cdot b + r$$

e $0 \leq r < b$.

Esempio. Se si considerano i numeri 19 e 5, esistono e sono unici i numeri 3 e 4 tali che:

$$19 = 3 \cdot 5 + 4$$

Multipli, divisori, numeri primi

Definizioni

Dati **due numeri naturali A e B**

se esiste un numero naturale **Q** tale che

A = B · Q

si dice che

A è un **multiplo** di B

B è un **divisore** di A

Esempio

A = 10
B = 2

Q esiste ed è **5**
infatti

10 = 2 · **5**

10 è un **multiplo** di 2

2 è un **divisore** di 10

Un **numero primo**

è un

numero naturale diverso da 0 e da 1 che ha come **divisori solo se stesso e 1**

Numeri primi fino a 100				
2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

supermappe.it
fatto con SuperMappe

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

Ogni numero naturale $n > 1$ può essere scomposto **in uno e un sol modo** nel prodotto di numeri primi, cioè:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$$

Domanda. Perché escludiamo il numero 1 e prendiamo in considerazione solo i numeri naturali $n > 1$?

TEOREMA DI EUCLIDE SULL'INFINITÀ DEI NUMERI PRIMI

I numeri primi sono infiniti.

CRITERI DI DIVISIBILITÀ

- Un numero è divisibile per **2** se termina con una cifra pari.
- Un numero è divisibile per **3** se la somma delle sue cifre è divisibile per 3.
- Un numero è divisibile per **4** se le ultime due cifre a destra sono due zeri o formano un numero divisibile per 4.
- Un numero è divisibile per **5** se termina con lo 0 o con il 5.
- Un numero è divisibile per **9** se la somma delle sue cifre è divisibile per 9.
- Un numero è divisibile per **11** quando la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari è zero o è divisibile per 11 .
- Un numero è divisibile per **25** se termina con 00 o 25 o 50 o 75.
- Un numero è divisibile per **10**, **100**, **1000**, … se termina con uno, due, tre, … zeri.

MCD, mcm

Definizioni

Dati **due numeri naturali A e B** diversi da 0

il **Massimo Comune Divisore MCD**

è

il più **grande** tra i **divisori comuni** di A e B

Esempio

A = 16
B = 20

divisori di A = 2, 4, 8
divisori di B = 2, 4, 5, 10

divisori **comuni** ad A e B :
2, 4

scelgo il più grande

MCD (16; 20) = 4

il **minimo comune multiplo mcm**

è

il più **piccolo** tra i **multipli comuni** di A e B (escluso lo 0)

Esempio

A = 15
B = 6

multipli di A = 15, **30**, 45, ...
multipli di B = 6, 12, 18, 24, **30**, ...

scelgo il più piccolo **multiplo** in **comune**

mcm (15; 6) = **30**

supermappe.it
fatto con SuperMappe

scrivere quel numero come
moltiplicazione di numeri primi

significa

Scomporre un numero in fattori primi

Esempio

Scomponiamo **60** in fattori primi

Numeri primi fino a 100

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

- costruiamo lo schema

60

- scriviamo il più piccolo divisore primo di 60

60	2

- calcoliamo la divisione

60	2

- scriviamo il risultato

60	2
30	

- andiamo avanti fino a che il risultato della divisione è 1

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

- scriviamo la fattorizzazione

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

supermappe.it
fatto con SuperMappe

Calcolo di MCD e mcm

Esempio

Dati due o più numeri naturali diversi da zero

24 e 60

si scompongono in fattori primi

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24 = 2^3 \cdot 3$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

per trovare il **MCD**

tra i **fattori comuni**	$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
prendiamo quelli con l'**esponente più piccolo**	$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
e li **moltiplichiamo** tra loro	$MCD\ (24; 60) = 2^2 \cdot 3$

per trovare il **mcm**

tra **tutti i fattori**	$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
prendiamo quelli con l'**esponente più grande**	$24 = 2^3 \cdot 3$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
e li **moltiplichiamo** tra loro	$mcm\ (24; 60) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Numeri primi fino a 100

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

supermappe.it
fatto con SuperMappe

ESERCIZIO

Utilizzando un esempio a vostra scelta, verificare la validità della seguente relazione:

$$a \cdot b = MCD(a, b) \cdot mcm(a, b)$$

essendo *a* e *b* due numeri naturali da voi scelti.

CHE COS'È UN ALGORITMO

Intuitivamente si dispone di un ***algoritmo*** per risolvere un problema se si ha un elenco finito di istruzioni tali che:

- a partire dai dati iniziali le istruzioni sono applicabili in maniera rigorosamente ***deterministica***, cioè in modo che ad ogni passo sia sempre possibile stabilire univocamente quale è l'istruzione che deve essere applicata al passo successivo;
- si disponga di un criterio univoco per stabilire quando si è raggiunto uno ***stato finale***, quando cioè il processo deve considerarsi terminato e il risultato, se esiste, è stato ottenuto. Uno stato finale deve sempre essere raggiungibile in un numero *finito* di passi.

Il termine deriva dal nome del matematico persiano ***Al-Khwarizmi*** (780 – 850 ca) in quanto egli fu uno dei primi a far riferimento esplicito al concetto di algoritmo nel suo "*Libro della matematica orientale*".

PROPRIETÀ DI UN ALGORITMO

Dalla definizione di algoritmo è possibile evincere le due **proprietà** fondamentali di un algoritmo:

- ***finitezza***, ovvero la sequenza delle istruzioni di un algoritmo deve essere finita;
- ***effettività***, ovvero ogni algoritmo deve portare ad un risultato.

Un algoritmo deve inoltre essere ***non ambiguo***, cioè le sue istruzioni devono essere comprensibili a chiunque le voglia applicare.

Per le caratteristiche di *finitezza* e di *determinismo*, un algoritmo si presta a essere automatizzato, cioè a essere eseguito da una macchina opportunamente progettata.

ESEMPI DI ALGORITMO

Sono esempi di algoritmi:

- le regole delle quattro operazioni matematiche;
- il metodo euclideo per il calcolo del massimo comun divisore;
- il metodo delle tavole di verità per stabilire se un'espressione logica è una tautologia.

Un altro esempio di algoritmo

Calcolare il *M.C.D.* di due numeri naturali diversi da zero.

- Scomporre i numeri in fattori primi
- Scegliere i fattori comuni
- Scegliere quelli con esponente più piccolo
- Moltiplicare tra loro i numeri scelti

ALGORITMO EUCLIDEO DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE

Se r è il resto della divisione intera di due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, con $a > b$, allora:

- se $r = 0$, si ha che $MCD(a, b) = b$;
- se $r \neq 0$, si ha che $MCD(a, b) = MCD(b, r)$

Quindi, per trovare il $M.C.D.(a, b)$ basta eseguire le divisioni finché il resto non sarà uguale a zero.

Il $MCD(a, b)$ sarà uguale all'ultimo resto non nullo.

ESEMPIO 1

Determinare il MCD (24, 14).

- $24 = \mathbf{14} \cdot 1 + \mathbf{10}$
- $14 = \mathbf{10} \cdot 1 + \mathbf{4}$
- $10 = \mathbf{4} \cdot 2 + \mathbf{2}$
- $4 = \mathbf{2} \cdot 2 + \mathbf{0}$

Quindi MCD(24, 14) = 2

ESEMPIO 2

Determinare il MCD(61, 24).

- $61 = \mathbf{24} \cdot 2 + \mathbf{13}$
- $24 = \mathbf{13} \cdot 1 + \mathbf{11}$
- $13 = \mathbf{11} \cdot 1 + \mathbf{2}$
- $11 = \mathbf{2} \cdot 5 + \mathbf{1}$
- $2 = \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{0}$

Quindi MCD(61, 24) = 1, cioè i numeri sono **primi fra loro**.

PROGRAMMA IN JAVA PER IL CALCOLO DEL MCD CON IL METODO EUCLIDEO

http://utenti.quipo.it/base5/numeri/euclidalgor.htm