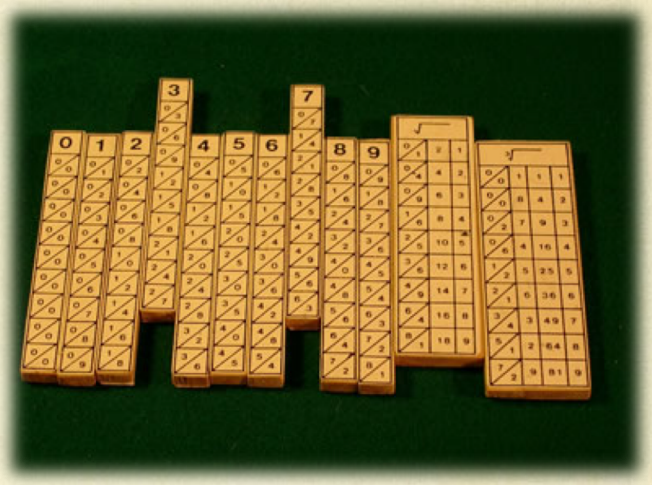
Liceo Scientifico “S. Cannizzaro” – Classe III D



Esponenziali

Prof. E. Modica

Potenza con esponente reale

- **<u>Definizione</u>**. Dati un numero reale $a > 0$ e un numero reale x qualunque, si definisce ***potenza con esponente reale*** del numero a il numero reale a^x.

- <u>*Osservazione*</u>: Questa potenza risulta essere sempre un numero reale positivo! Cioè:

$$\boldsymbol{a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}}$$

Proprietà delle potenze

- Se $a > 1$ e $x < y$, allora $a^x < a^y$
- Se $0 < a < 1$ e $x < y$, allora $a^x > a^y$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^x : b^x = (a : b)^x \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $(a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $a^x : a^y = a^{x-y} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Teorema

Se ***a*** *è un numero positivo* ***diverso da 1****, allora la potenza* $\boldsymbol{a^x}$ *assume una sola volta tutti i valori positivi, ossia qualunque sia* $a > 0$, $a \neq 1$, *e qualunque sia* $b > 0$, *esiste un* ***unico*** *numero reale x tale che:*

$$a^x = b$$

La funzione esponenziale

<u>Definizione</u>. Si dice **funzione esponenziale**, una funzione trascendente la cui espressione analitica è del tipo:

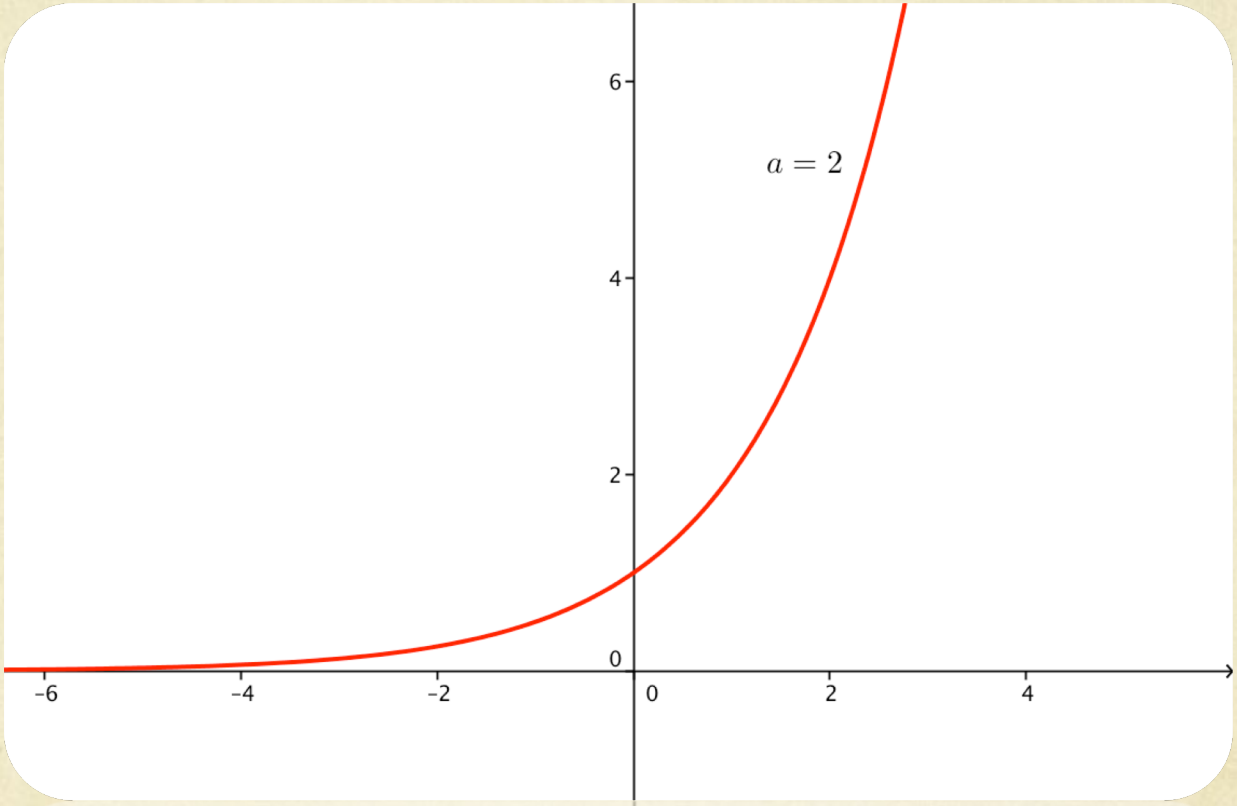
$$\boldsymbol{y = a^x}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione. Il dominio della funzione esponenziale è $\mathbb{R}$, mentre il codominio è $\mathbb{R}^+$.

Grafico della funzione esponenziale (caso $a > 1$)

x	y
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4



Proprietà nel caso $a > 1$

Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- ogni valore di x ha un corrispondente y;
- i valori del corrispondente y sono tutti positivi, cioè $a^x > 0$;
- la funzione è **monotona crescente**, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, allora:

$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

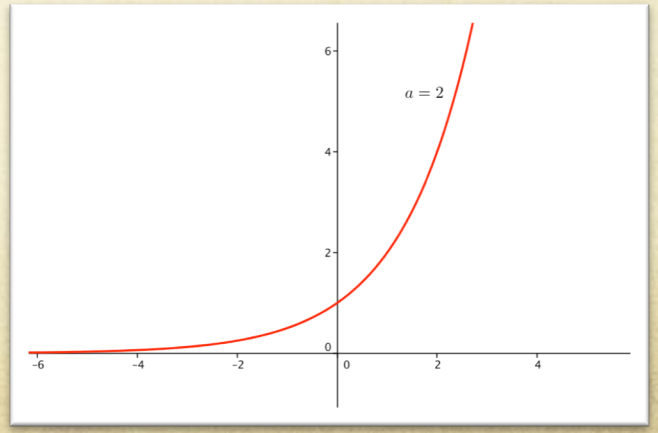
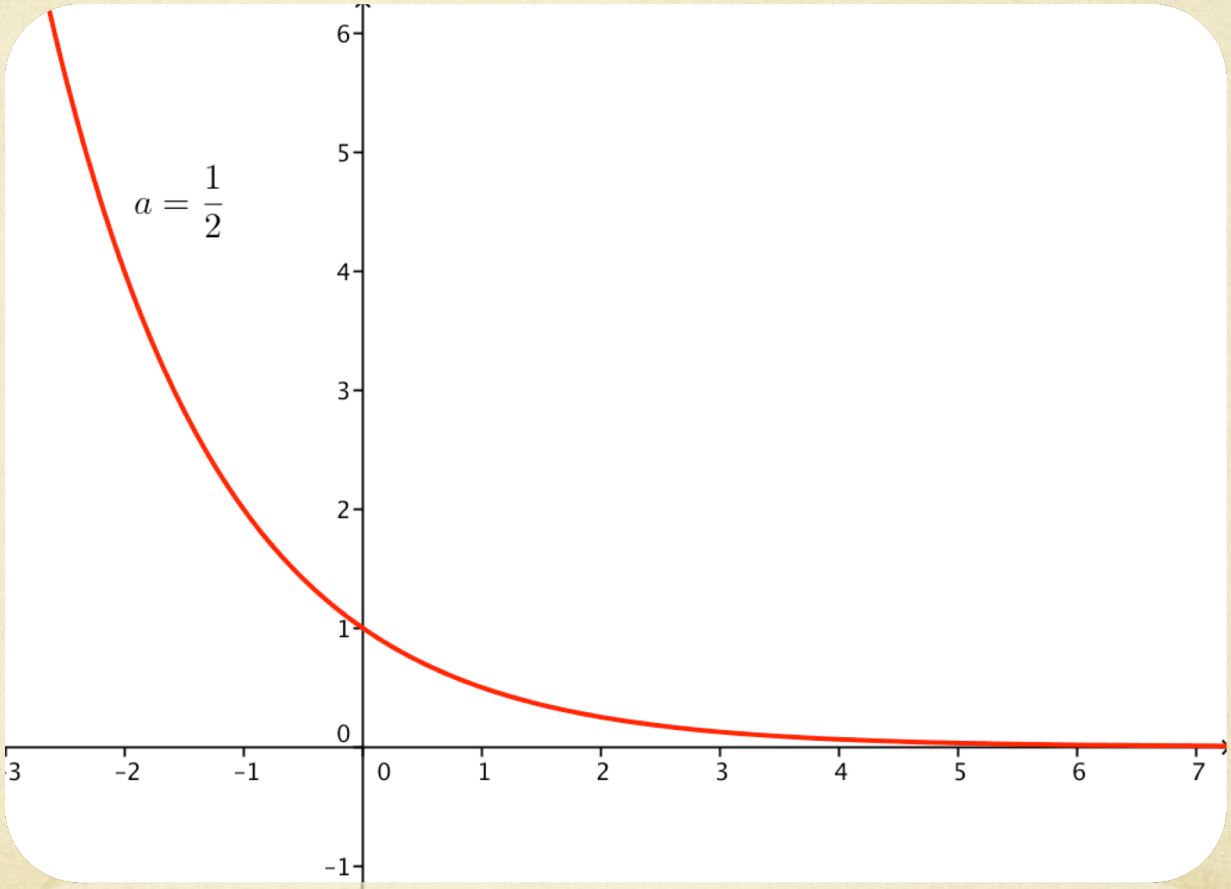


Grafico della funzione esponenziale (caso $0 < a < 1$)

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25

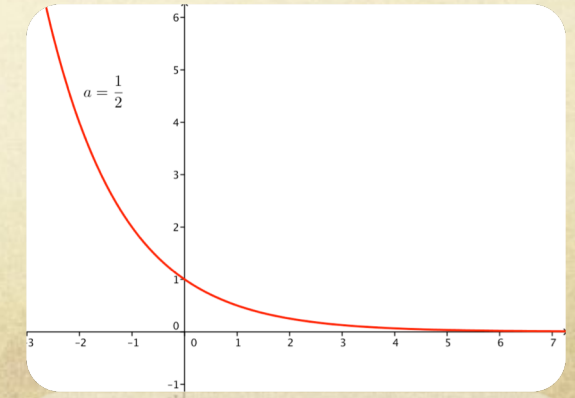


Proprietà nel caso 0 < a < 1

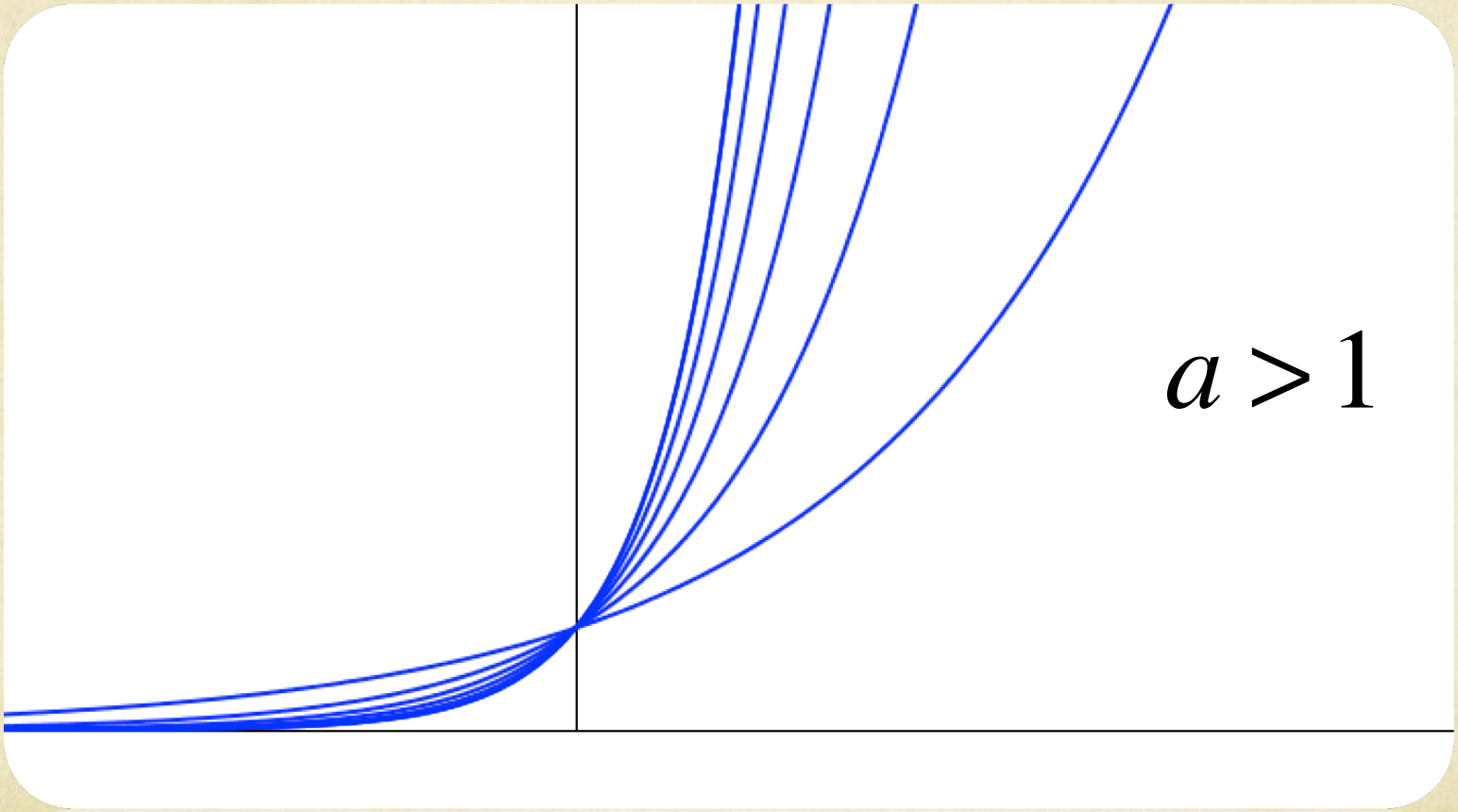
Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- ogni valore di x ha un corrispondente y;
- i valori del corrispondente y sono tutti positivi, cioè $a^x > 0$;
- la funzione è **monotona decrescente**, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, allora:

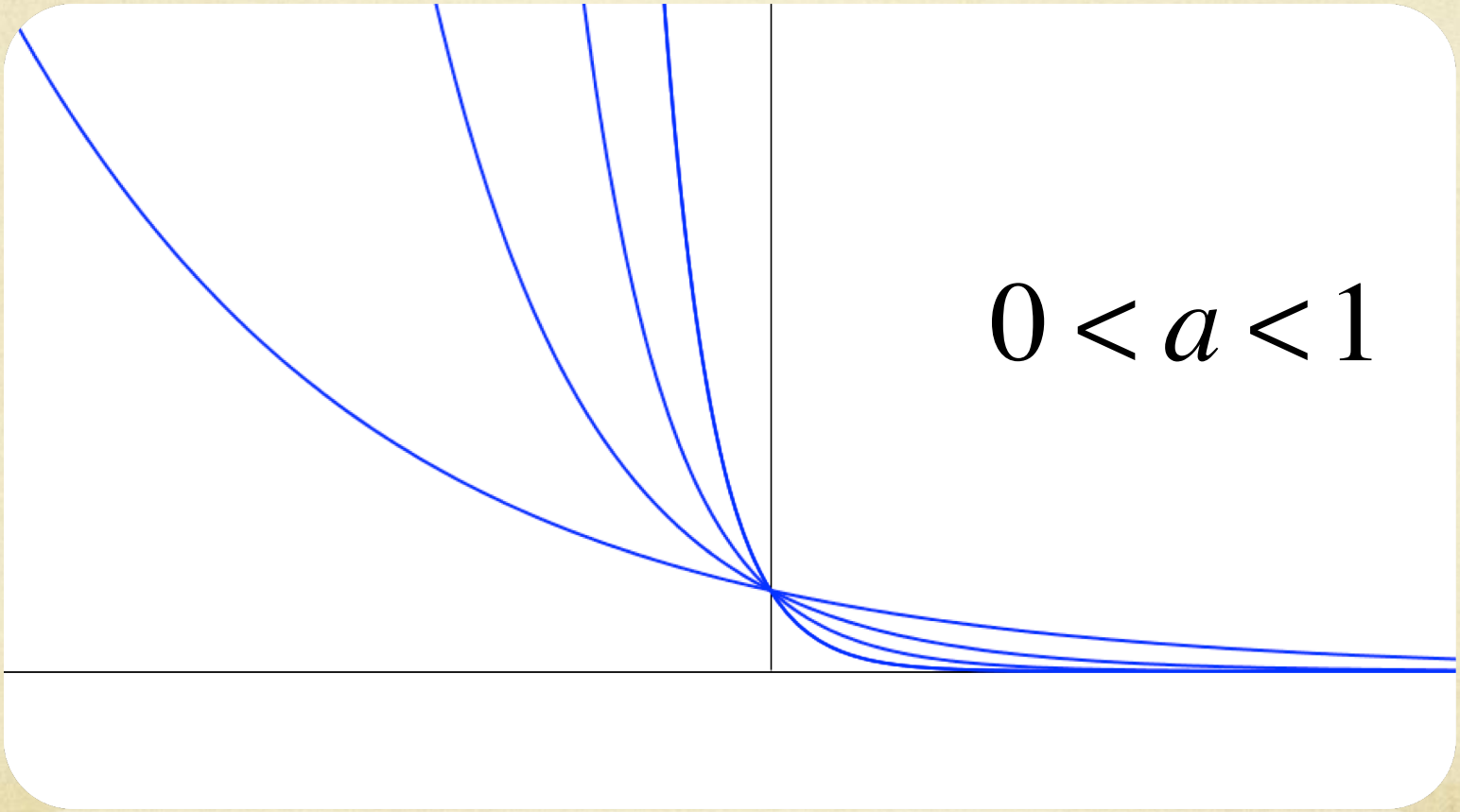
$$a^{x_1} > a^{x_2}$$



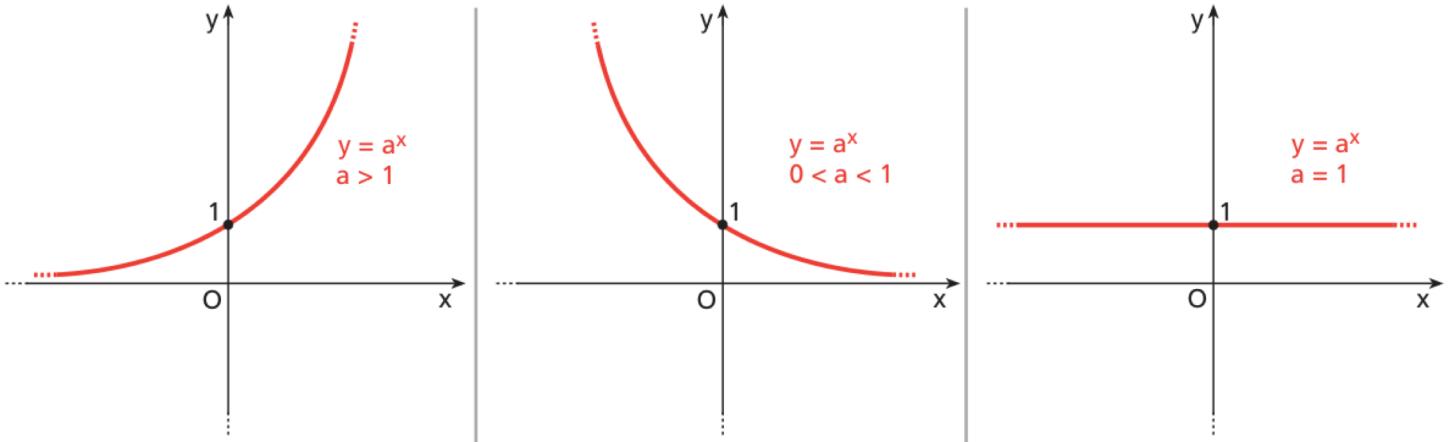
Variazione nel caso $a > 1$



Variazione nel caso $0 < a < 1$



In sintesi...



a. • Dominio: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\mathbb{R}^+$;
• funzione crescente in $\mathbb{R}$;
• funzione biiettiva;
• $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
• $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

b. • Dominio: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\mathbb{R}^+$;
• funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
• funzione biiettiva;
• $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
• $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

c. • Dominio: $\mathbb{R}$;
• codominio: $\{1\}$;
• funzione costante;
• funzione non iniettiva.

Le funzioni del tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$

La definizione di potenza a esponente reale permette di estendere il concetto di funzione a forme del tipo:

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

Studiamo i dominio di queste funzioni considerando per primi i casi con base o con esponente costante a.

La funzione $y = a^{f(x)}$

Tale funzione esiste in tutto il dominio di $f(x)$, se e solo se $\boldsymbol{a > 0}$.

<u>*Esempio*</u>. Determinare il dominio della funzione:

$$y = 3^{\sqrt{x-1}}$$

Essendo $3 > 0$, la funzione esiste in tutto il dominio di $f(x) = \sqrt{x-1}$, cioè per $x \geq 1$.

La funzione y = [f(x)]^a

Tale funzione esiste:

- per $f(x) \geq 0$, se $\boldsymbol{a > 0}$,
- per $f(x) > 0$, se $\boldsymbol{a < 0}$.

<u>*Esempio*</u>. La funzione $y = (x^2 - 9)^{\sqrt{2}}$ ha per dominio:

$$x \leq -3 \vee x \geq 3$$

Per la funzione $y = (x^2 - 9)^{-\sqrt{2}}$, cioè $y = \frac{1}{(x^2-9)^{\sqrt{2}}}$, bisogna escludere i valori che annullano il denominatore, quindi il dominio è:

$$x < -3 \vee x > 3$$

La funzione y = $[f(x)]^{g(x)}$

Tale funzione esiste nel dominio di $g(x)$, se e solo se $\boldsymbol{f(x) > 0}$.

<u>*Esempio*</u>. Sia data la funzione $y = (4x^2 - 1)^{\sqrt{x}}$:

- $\sqrt{x}$ esiste per $x \geq 0$;
- affinché esista la potenza, deve essere $4x^2 - 1 > 0$, cioè $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$.

Mettendo a sistema le due condizioni, si ottiene come dominio $x > \frac{1}{2}$.