

LICEO SCIENTIFICO STATALE “S. CANNIZZARO” – PALERMO
“L’INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI”
CLASSE: III SEZIONE: D

Nell’insieme dei numeri reali la seguente equazione di secondo grado:

$$x^2 = -1$$

non ammette alcuna soluzione.

Per risolvere tale equazione, si introduce il nuovo simbolo i , il cui quadrato è proprio uguale a -1 , cioè poniamo:

$$i^2 = -1$$

Questo nuovo simbolo prende il nome di **unità immaginaria** e non è associata all’operazione del *contare*, ma è solamente un simbolo che ci permette di estendere i numeri reali, e che è soggetto alla legge:

$$i^2 = -1$$

ovvero

$$i = \sqrt{-1}$$

Definizione: Si definisce **numero complesso** ogni scrittura del tipo

$$a + ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Il numero a prende il nome di **parte reale**, mentre il numero b prende il nome di **coefficiente della parte immaginaria**.

L’insieme dei numeri complessi è quindi dato da:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

SOMMA ALGEBRICA

Definizione: Dati due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, la loro **somma algebrica** è data da:

$$z_1 \pm z_2 = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

Esempio: Sommare e sottrarre i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2} - 3i$.

La somma è data da:

$$z_1 + z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + i(2 - 3) = 1 - i$$

La differenza è data da:

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i(2 + 3) = 5i$$

MOLTIPLICAZIONE

Definizione: Dati due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, la loro **moltiplicazione** è data da:

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$$

ovvero:

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Esempio: Moltiplicare i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2} - 3i$.

Il prodotto è dato da:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}i + i - 6i^2 = \left(\frac{1}{4} + 6\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\right)i = \frac{25}{4} - \frac{1}{2}i$$

CONIUGIO

Definizione: Si definisce **coniugato** del numero complesso $a + ib$ il numero complesso $a - ib$.

Si osservi che un numero complesso e il suo coniugato hanno la stessa parte reale e coefficienti della parte immaginaria opposti.

Esempio: Il numero complesso coniugato di $7 - 5i$ è il numero complesso $7 + 5i$.

EQUAZIONI DI II GRADO E NUMERI COMPLESSI

Per risolvere l'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si utilizza la formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che coinvolge l'estrazione della radica quadrata della quantità $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si possono quindi presentare, in merito alle radici, i seguenti casi:

- ✚ $\Delta > 0$ due radici reali e distinte;
- ✚ $\Delta = 0$ due radici reali coincidenti;
- ✚ $\Delta < 0$ due radici complesse coniugate.

Esempio: Risolvere l'equazione $x^2 - 2x + 10 = 0$

Si ha:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 10 = -9$$

e quindi:

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{-9} = 1 \mp 3i$$

cioè

$$x_1 = 1 - 3i, \quad x_2 = 1 + 3i$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi complesse coniugate.

Esercizi

1. Effettuare le seguenti somme algebriche tra numeri complessi:

$(-5 + 2i) + (3 + i)$	$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}i\right) - \left(\frac{1}{2} - 2i\right)$
-----------------------	---

2. Moltiplicare i seguenti numeri complessi:

$(2 - i)(2 + i)$	$(\sqrt{2} + 3i)(\sqrt{8} - 2i)$
------------------	----------------------------------

3. Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado nell'insieme dei numeri complessi:

$x^2 + 5 = 0$	$x^2 + x + 1 = 0$
$2x^2 + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 26 = 0$
$7x^2 + 3 = 0$	$x^2 + 2\sqrt{5}x + 1 = 0$