Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" – Palermo – Classe III D
EQUAZIONI POLINOMIALI

Divisione di polinomi, teorema del resto e teorema di Ruffini

Teorema ***(della divisione con resto tra due polinomi in una variabile)*. Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x) \neq 0$, esistono sempre, e sono unici, due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:**

$$\boldsymbol{A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)}$$

dove $R(x)$ o è il polinomio nullo o è un polinomio che ha grado minore del grado di $B(x)$.

Procedimento per la determinazione del quoziente e del resto della divisione

1. **Ordinare** i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile e, qualora il polinomio dovesse essere *incompleto*, inserire i termini mancanti con i termini che hanno coefficiente uguale a zero.
2. **Dividere** il termine di grado massimo del polinomio dividendo per il termine di grado massimo del polinomio divisore. In questo modo di ottiene il primo termine del polinomio quoziente.
3. **Moltiplicare** il primo termine del polinomio quoziente per tutti i termini del polinomio divisore e sommare il polinomio ottenuto, con i segni cambiati, al polinomio dividendo. Il polinomio che si ottiene prende il nome di **primo resto parziale**.
4. Se il resto parziale ha grado minore del polinomio divisore, allora la divisione è terminata. Diversamente si devono ripetere i passaggi descritti nei punti 2 e 3, considerando come nuovo polinomio dividendo il primo resto parziale. Il procedimento si arresta quando verrà determinato un resto parziale avente grado inferiore rispetto al polinomio divisore. Quest'ultimo sarà il **resto** della divisione.

Teorema del resto. Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ di grado maggiore o uguale a 1 per un binomio del tipo $(x-a)$ è uguale al valore che il polinomio assume quando al posto dell'indeterminata *x* si sostituisce il valore *a*.

Dimostrazione

Per il teorema della divisibilità dei polinomi esistono $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x) = Q(x) \cdot (x-a) + R(x)$$

Poiché il divisore ha grado uno, il resto deve avere grado zero, cioè sarà un numero che indicheremo con la lettera *R*.
Quindi si avrà:

$$A(x) = Q(x) \cdot (x-a) + R$$

Essendo l'uguaglianza vera per qualsiasi valore di *x*, in particolare sarà vera quando $x = a$ e quindi si ha:

$$A(a) = Q(a) \cdot (a-a) + R$$

da cui seguirà che:

$$R = A(a)$$

Teorema di Ruffini. Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $(x-a)$ è che risulti $A(a)=0$.

Dimostrazione

Prima implicazione

Ipotesi: $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$ **Tesi**: $A(a)=0$

Se $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$, allora esiste $Q(x)\neq 0$ (il resto è nullo) tale che:

$$A(x)= Q(x)\cdot(x-a)$$

Essendo l'uguaglianza vera per qualsiasi valore di x, in particolare sarà vera quando $x=a$ e quindi si ha:

$$A(a)= Q(a)\cdot(a-a)$$

da cui seguirà che:

$$A(a)=0$$

Seconda implicazione

Ipotesi: $A(a)=0$ **Tesi**: $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$

Poiché, per il teorema del resto, il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $(x-a)$ è $R=A(a)$ e poiché, per ipotesi, $A(a)=0$, ne segue che $R=0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione pari a zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $(x-a)$.

Estensione della regola di Ruffini

Il teorema della divisione fra due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x)\neq 0$, ci assicura che esistono sempre due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$$

dove $R(x)$ o è il polinomio nullo o è un polinomio che ha grado minore del grado di $B(x)$.

Se il polinomio $B(x)=nx-a$, allora:

$$A(x)=Q(x)\cdot(nx-a)$$

Dividendo ambo i membri per n, otteniamo:

$$\frac{A(x)}{n}=\frac{Q(x)\cdot(nx-a)}{n}+\frac{R}{n}$$

da cui:

$$\frac{A(x)}{n} = Q(x)\left(x - \frac{a}{n}\right) + \frac{R}{n}$$

Notiamo che **il quoziente non cambia**, ma risultano divisi per *n* sia il dividendo, che il resto.

Quindi, per effettuare la regola di Ruffini nel caso in cui si voglia dividere un polinomio $A(x)$ per un binomio $B(x) = nx - a$ è necessario:

1. dividere per *n* tutti i coefficienti dei monomi che compongono il polinomio $A(x)$;
2. dividere per *n* tutti i coefficienti dei monomi che compongono il polinomio $B(x)$, che diventerà quindi della forma $x - \frac{a}{n}$;
3. effettuare regola di Ruffini tra questi due nuovi polinomi ottenuti;
4. il quoziente di questa divisione è lo stesso di quello della divisione fra $A(x)$ e $B(x) = nx - a$, mentre il resto di questa divisione, moltiplicato per *n*, darà il resto della divisione di partenza.

Teorema. Data l'equazione:

$$\boldsymbol{a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}$$

con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, ogni sua eventuale soluzione razionale $\frac{p}{q}$ è tale che p sia un divisore di a_0 e q sia un divisore di a_2.

Dimostrazione

Sia $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con *p* e *q* primi tra loro, una soluzione dell'equazione data. Si ha:

$$a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

cioè:

$$a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Moltiplicando ambo i membri per q^2 si ottiene:

$$a_2p^2 + a_1pq + a_0q^2 = 0$$

- ✓ Ricavando il termine a_0q^2, otteniamo: $a_0q^2 = -a_2p^2 - a_1pq = p(-a_2p - a_1q)$, cioè il termine a_0q^2 risulta essere un multiplo di p. Poiché q^2 non è un multiplo di p, in quanto abbiamo supporto *p* e *q* primi tra loro, deve essere a_0 multiplo di p.
- ✓ Analogamente, ricavando il termine a_2p^2, otteniamo: $a_2p^2 = q(-a_1p - a_0q)$, cioè il termine a_2p^2 risulta essere un multiplo di q. Poiché p^2 non è un multiplo di q, in quanto abbiamo supporto *p* e *q* primi tra loro, deve essere a_2 multiplo di q.

c.v.d.

Esercizio. Generalizzare il teorema precedente al caso dell'equazione:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Le equazioni polinomiali

Le equazioni di primo grado e di secondo grado possono essere facilmente risolte e le loro formule risolutive coinvolgono le quattro operazioni fondamentali e l'estrazione di radice.
Nella storia si è cercato di trovare delle formule matematiche che permettessero di risolvere le equazioni di qualsiasi grado, utilizzando le operazioni fondamentali e l'estrazione di radice. Le equazioni che ammettono tali formule risolutive si dicono **risolubili per radicali**.
Il matematico italiano Paolo Ruffini (1765-1822) dimostrò che le equazioni di grado superiore al quarto non sono risolubili per radicali. Tale risultato è stato dimostrato in maniera rigorosa dal matematico Niels Abel (1802-1829).

In genere quando risolviamo equazioni di grado superiore al secondo, si cerca di scomporre il polinomio in fattori irriducibili e si utilizza la legge annullamento del prodotto:

$$a(x) \cdot b(x) \cdot c(x) \cdot \cdots = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x) = 0 \vee b(x) = 0 \vee c(x) = 0 \vee \ldots$$

Equazioni polinomiali particolari

Definizione. Data un'equazione polinomiale $p(x) = 0$, si definisce **molteplicità di una soluzione**, il numero di soluzioni che coincidono con essa.

Esempio. Se consideriamo l'equazione:

$$(x-2)^3 \cdot (x-4)^2 \cdot (x+5) = 0$$

la soluzione $x = -5$ ha molteplicità 1, la soluzione $x = 4$ ha molteplicità 2 e la soluzione $x = 2$ ha molteplicità 3.

Risultato generale: un'equazione polinomiale di grado *n* ammette in $\mathbb{R}$ al più *n* soluzioni, ognuna considerata con la propria molteplicità.

Esempi vari

1) *Equazioni già scomposte o facilmente scomponibili*.
    a. $(x-1) \cdot (x-4) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$
    b. $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x-3) + (x-3) = 0 \quad \rightarrow \quad (x-3)(x^2+1) = 0$

2) *Equazioni in cui si possono effettuare sostituzioni*.
    ✓ $(x^2+2x)^2 - 5(x^2+2x) + 6 = 0$, poniamo $x^2 + 2x = t$ e otteniamo: $t^2 - 5t + 6 = 0$, da cui $t = 2, t = 3$.
    Si risolvono quindi le due equazioni: $x^2 + 2x = 2$ e $x^2 + 2x = 3$.

3) *Equazioni binomie*.
Sono equazioni del tipo:

$$x^n = a \text{ con } n \in \mathbb{N}_0 \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

<u>I caso</u>: *n* pari
- ✓ Se $a < 0$ l'equazione non ammette soluzioni $(Es.\ x^2 = -1)$
- ✓ Se $a = 0$ l'equazione ammette la soluzione $x = 0$ con molteplicità *n* $(Es.\ x^3 = 0)$
- ✓ Se $a > 0$ l'equazione ammette le soluzioni $x = \pm\sqrt[n]{a}$ $(Es.\ x^4 = 16)$

<u>II caso</u>: *n* dispari
- ✓ L'equazione ammette la soluzione $x = \sqrt[n]{a}$

4) *Equazioni biquadratiche*.
Sono equazioni del tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}_0$$

Si risolvono ponendo $x^n = t$ e risolvendo l'equazione $at^2 + bt + c = 0$.

Equazioni polinomiali complete

<u>Equazioni reciproche</u>

<u>Definizione</u>. Un'equazione si dice **reciproca** quando i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali oppure quando sono uguali in modulo ma di segno opposto.

A) Equazioni reciproche di terzo grado 1ª specie

$$\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$$

Il primo membro di tale equazione è divisibile per $x + 1$ e quindi, applicando la regola di Ruffini, si ottiene:

$$(x + 1) \cdot [ax^2 + (b - a)x + a = 0]$$

Risolvendo le due equazioni si ottengono le soluzioni dell'equazione data.

Esempio. Determinare le soluzioni dell'equazione:

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$$

Utilizzando la regola di Ruffini:

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo:

$$(x+1)(3x^2+10x+3)=0$$

Risolvendo infine le due equazioni si ottengono le seguenti soluzioni:

$$x_1=-1, x_2=-\frac{1}{3}, x_3=-3$$

B) Equazioni reciproche di terzo grado 2ª specie

$$\boldsymbol{ax^3+bx^2-bx-a=0}$$

Il primo membro di tale equazione è divisibile per $x-1$ e quindi, applicando la regola di Ruffini, si ottiene:

$$(x-1)\cdot[ax^2+(a+b)x+a=0]$$

Risolvendo le due equazioni si ottengono le soluzioni dell'equazione data.

Esempio. Determinare le soluzioni dell'equazione:

$$3x^3+7x^2-7x-3=0$$

Utilizzando la regola di Ruffini:

	3	7	-7	-3
1		3	10	3
	3	10	3	0

possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo:

$$(x-1)(3x^2+10x+3)=0$$

Risolvendo infine le due equazioni si ottengono le seguenti soluzioni:

$$x_1=1, x_2=-\frac{1}{3}, x_3=-3$$

C) Equazioni reciproche di quarto grado 1ª specie

$$\boldsymbol{ax^4+bx^3+cx^2+bx+c=0}$$

dividendo ambo i membri per x^2 otteniamo:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

e, raccogliendo a fattore comune i coefficienti uguali, si ottiene:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

Posto $x+\frac{1}{x}=t$ ed elevando ambo i membri al quadrato, si ha:

$$a(t^2-2)+bt+c=0$$

da cui segue che:

$$at^2+bt+c-2a=0$$

Risolvendo quest'ultima equazione otteniamo i valori t_1 e t_2 che sostituiti nell'uguaglianza $x+\frac{1}{x}=t$ permettono di determinare le soluzioni dell'equazione.

Esempio. Determinare le soluzioni dell'equazione:

$$12x^4+4x^3-41x^2+4x+12=0$$

Utilizziamo il procedimento precedentemente illustrato:

$$12x^2+4x-41+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0$$

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

$$12(t^2-2)+4t-41=0$$

$$12t^2+4t-65=0$$

da cui:

$$t_1=\frac{13}{6}, \qquad t_2=-\frac{5}{2}$$

Quindi, si ha:

- ✓ $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6} \implies 6x^2-13x+6=0 \implies x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{2}{3}$
- ✓ $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \implies 2x^2+5x+2=0 \implies x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=-2$

D) Equazioni reciproche di quarto grado 2ª specie

$$\boldsymbol{ax^4+bx^3-bx-c=0}$$

Al primo membro dell'equazione abbiamo un polinomio divisibile sia per $x-1$ che per $x+1$ per cui otterremo:

$$(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c)=0$$

Risolvendo queste tre equazioni si ottengono le soluzioni cercate.

Esempio. Determinare le soluzioni dell'equazione:

$$10x^4 - 29x^3 + 29x - 10 = 0$$

Utilizzando due volte la regola di Ruffini:

	10	-29	0	29	-10
1		10	-19	-19	10
	10	-19	-19	10	0
-1		-10	29	-10	
	10	-29	10	0	

otteniamo:

$$(x-1)(x+1)(10x^2 - 29x + 10) = 0$$

Quindi si ha:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = \frac{2}{5}, \qquad x_4 = \frac{5}{2}$$

D) Equazioni reciproche di quinto grado

$$\boldsymbol{ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$$

Bisogna dividere il polinomio per $x - 1$ o per $x + 1$ per ricondursi a uno dei due casi precedenti.

Esempio. Determinare le soluzioni dell'equazione:

$$12x^5 + 16x^4 - 37x^3 - 37x^2 + 16x + 12 = 0$$

Dividendo per $x + 1$ si ottiene:

$$(x+1)(12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12) = 0$$

Risolvendo, otterremo:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = \frac{3}{2}, \qquad x_3 = \frac{2}{3}, \qquad x_4 = -\frac{1}{2}, \qquad x_5 = -2$$

EQUAZIONI POLINOMIALI

Teorema fondamentale dell'algebra. Ogni polinomio a coefficienti reali o complessi, di grado maggiore o uguale a 1, ammette almeno una radice complessa.

Corollario. Ogni polinomio a coefficienti reali o complessi di grado n ammette in $\mathbb{C}$ esattamente n radici ciascuna contata con la relativa molteplicità.

Dimostrazione

Sia dato il polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $n \geq 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra $p(x)$ ha almeno una radice $x_1 \in \mathbb{C}$. Utilizzando il teorema di Ruffini possiamo scrivere il polinomio dato come:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot f(x)$$

dove il grado del polinomio $f(x)$ è uguale a $n - 1$.
Applicando nuovamente il teorema fondamentale dell'algebra al polinomio $f(x)$, otteniamo la soluzione x_2 e, mediante il teorema di Ruffini, possiamo scrivere:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot g(x)$$

dove il grado del polinomio $g(x)$ è uguale a $n - 2$.
Utilizzando lo stesso ragionamento altre $n - 2$ volte otteniamo la scomposizione seguente:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Quindi il polinomio ammette esattamente n radici in $\mathbb{C}$.

c.v.d.

Numeri reali algebrici e numeri reali trascendenti

In matematica esiste una classificazione dei numeri reali in due insiemi: l'insieme dei numeri algebrici e l'insieme dei numeri trascendenti.

Definizione. Si definisce **algebrico**, un numero reale che è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi.

Esempi.
- ✓ Il numero 2 è algebrico in quanto soluzione dell'equazione $x - 2 = 0$.
- ✓ Il numero $\sqrt{2}$ è algebrico in quanto soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$.

Teorema. Tutti i numeri razionali sono algebrici.

Dimostrazione

Consideriamo il numero $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con *p* e *q* primi tra loro. Il numero $\frac{p}{q}$ è algebrico in quanto soluzione dell'equazione $qx - p = 0$.

c.v.d.

<u>**Definizione**</u>. Si definisce **trascendente**, un numero reale che non è algebrico, ossia che non è soluzione di nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi.

I numeri trascendenti devono il loro nome al grande matematico Eulero che, riferendosi ad essi, disse che: "questi numeri *trascendono* il potere dei metodi algebrici".

Osservazione. Poiché tutti i numeri razionali sono algebrici, ne segue che tutti i numeri trascendenti sono irrazionali.

Nel 1882 il matematico Lindemann dimostrò che il numero π è trascendente.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere pensato come l'unione dei due insiemi.