Ragionamenti e metodi di dimostrazione

Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro"

Prof.re E. Modica

Proposizioni

Si definisce *proposizione* una frase alla quale è possibile attribuire uno e un solo valore di verità, ossia una frase che può essere giudicata *vera* oppure *falsa*.

Esempi

Sono proposizioni le seguenti frasi:

"*Tokyo è in Giappone*" (proposizione vera), "*Il numero 3 è pari*" (proposizione falsa)

Non sono proposizioni le seguenti frasi:

"*La mia macchina è molto carina*", "*Quella di oggi è una brutta giornata*", "*Stai attento*!", "*Quanto fa 3 più 3*?"

Principi base della logica bivalente

La logica che si basa su due valori di verità (vero-falso) prende il nome di ***logica bivalente*** o ***logica aristotelica***. Essa si basa sui seguenti principi.

Principio di non contraddizione	Una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa
Principio del terzo escluso	Una proposizione o è vera oppure è falsa.

Proposizioni semplici o atomiche

Le proposizioni formate da un **predicato** (un verbo) e dai suoi **argomenti** (gli oggetti a cui il predicato si riferisce), vengono dette ***proposizioni semplici*** o ***atomiche***.

Esempio

La proposizione "Un mezzo è maggiore di un terzo" è una proposizione il cui valore di verità è V, il predicato è "essere maggiore" e gli argomenti sono le frazioni ½ e 1/3.

Formule aperte

Una proposizione che contiene una variabile viene detta ***formula aperta***.

Esempi

- "x è maggiore di 7"
- "x è divisibile per 2"

Proposizioni composte o molecolari

Si definisce ***proposizione composta*** o ***molecolare***, una proposizione ottenuta a partire da proposizioni semplici mediante i connettivi logici.

Esempi

- "*Oggi piove e c'è vento*"
- "*Oggi piove o c'è il sole*"

La congiunzione

Siano date le proposizioni

p: “2 è un numero primo”

q: “3 è un numero primo”

costruiamo, per congiunzione, la proposizione:

p ***e*** *q*: “2 è un numero primo ***e*** 3 è un numero primo”

che, di solito, è scritta come:

2 ***e*** 3 sono numeri primi

La proposizione *p* e *q* è vera soltanto se sono vere sia la proposizione *p* sia la proposizione *q*. Il simbolo utilizzato è il seguente: $\wedge$.

Tavola di verità della congiunzione

Si definisce ***tavola di verità*** una tabella in cui vengono inseriti i valori di verità delle proposizioni.
Nel caso della congiunzione si ha la seguente tavola di verità.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio

Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni ottenute per congiunzione.

p	p è	q	q è	$p \wedge q$	$p \wedge q$ è
Il quadrato è una figura piana	**V**	Il cerchio è una figura piana	**V**	Il quadrato e il cerchio sono figure piane	
4 è un numero primo	**F**	7 è un numero primo	**V**	4 e 7 sono numeri primi	
-3 è un numero negativo	**V**	4 è un numero negativo	**F**	-3 e 4 sono numeri negativi	
7 è multiplo di 2	**F**	5 è multiplo di 2	**F**	7 e 5 sono multipli di 2	

Esempio: soluzione

Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni ottenute per congiunzione.

p	p è	q	q è	$p \wedge q$	$p \wedge q$ è
Il quadrato è una figura piana	**V**	Il cerchio è una figura piana	**V**	Il quadrato e il cerchio sono figure piane	**V**
4 è un numero primo	**F**	7 è un numero primo	**V**	4 e 7 sono numeri primi	**F**
-3 è un numero negativo	**V**	4 è un numero negativo	**F**	-3 e 4 sono numeri negativi	**F**
7 è multiplo di 2	**F**	5 è multiplo di 2	**F**	7 e 5 sono multipli di 2	**F**

La disgiunzione inclusiva

Siano date le proposizioni

p: "il professore oggi interroga"

q: "il professore oggi spiega"

costruiamo, per disgiunzione inclusiva, la proposizione:

p ***o*** *q*: "il professore oggi interroga ***o*** spiega"

Dalla formulazione della frase è chiaro che il professore oggi possa fare entrambe le cose e, per rendere vera la proposizione, basta che ne faccia almeno una.

La proposizione *p* o *q* è falsa soltanto se sono false sia la proposizione *p* sia la proposizione *q*. Il simbolo utilizzato è il seguente: $\vee$.

Tavola di verità della disgiunzione inclusiva

Nel caso della disgiunzione inclusiva si ha la seguente tavola di verità.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione esclusiva

Siano date le proposizioni

p: "oggi studio matematica"

q: "oggi studio latino"

costruiamo, per disgiunzione esclusiva, la proposizione:

o *p* ***o*** *q*: "oggi **o** studio matematica ***o*** studio latino"

Dalla formulazione della frase è chiaro che l'enunciato è falso sia se non studiassi nessuna delle due materie, sia se decidessi di studiare entrambe le materie.

La proposizione *o p* o *q* è vera soltanto se *p* è vera e *q* è falsa, oppure se *p* è falsa e *q* è vera. Il simbolo utilizzato è il seguente: $\dot{\vee}$.

Tavola di verità della disgiunzione esclusiva

Nel caso della disgiunzione esclusiva si ha la seguente tavola di verità.

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio

A un concorso è ammesso chi è diplomato o ha compiuto 25 anni. Quattro persone si trovano in queste situazioni:

- Mario è diplomato e ha 21 anni;
- Franca non è diplomata e ha 23 anni;
- Carlo non è diplomato e ha 26 anni;
- Giulia è diplomata e ha 30 anni.

Chi di loro è ammesso al concorso?

Esempio: soluzione

A un concorso è ammesso chi è diplomato o ha compiuto 25 anni. Quattro persone si trovano in queste situazioni:

- **Mario è diplomato e ha 21 anni;**
- **Franca non è diplomata è ha 23 anni;**
- **Carlo non è diplomato e ha 26 anni;**
- **Giulia è diplomata e ha 30 anni.**

Chi di loro è ammesso al concorso?

<u>Soluzione</u>

Indichiamo con:

p: "essere diplomato"

q: "aver compiuto 25 anni"

	p	q	$p \vee q$
Mario	V	F	V
Franca	F	F	F
Carlo	F	V	V
Giulia	V	V	V

La negazione

Data una proposizione, è possibile costruire una nuova proposizione utilizzando la negazione ***non***. Per esempio, dalla proposizione:

p: "Marco legge una rivista"

possiamo costruire la proposizione;

non p: "Marco non legge una rivista"

Se *p* è una proposizione vera, *non p* è una proposizione falsa; se *p* è falsa, *non p* è vera. Il simbolo utilizzato per la negazione di *p* è il seguente: ¬*p*.

Tavola di verità della negazione

Nel caso della negazione si ha la seguente tavola di verità.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Esempio

Date le proposizioni:

p: "30 è multiplo di 7" (falsa)

q: "30 è multiplo di 6" (vera)

stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) $\neg q$

b) $\neg(p \wedge q)$

c) $p \vee (\neg q)$

Esempio: soluzione

Date le proposizioni:

p: "30 è multiplo di 7" (falsa)

q: "30 è multiplo di 6" (vera)

stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) $\neg q$

b) $\neg p \wedge q$

c) $p \vee (\neg q)$

a) $\neg q$: 30 non è multiplo di 6 (**falsa**, in quanto negazione di una proposizione vera).

b) $\neg p \wedge q$: 30 *non* è multiplo di 7 *e* 30 è multiplo di 6 (**vera**, in quanto congiunzione di due proposizioni vere).

c) $p \vee (\neg q)$: 30 è multiplo di 7 *o* 30 *non* è multiplo di 6 (**falsa**, in quanto disgiunzione di due proposizioni false).

Esercizio

Determinare la tavola di verità della proposizione:

$$p \wedge \neg(\neg q \vee p)$$

p	q	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$\neg(\neg q \vee p)$	$p \wedge \neg(\neg q \vee p)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F

La proposizione è sempre falsa, ***indipendentemente*** dal significato e dal valore di verità di p e q.

Esercizio

Verifica che la proposizione $p \vee \neg p$ è sempre vera, mentre la proposizione $p \wedge \neg p$ è sempre falsa.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Tautologie e contraddizioni

- Si definisce ***tautologia*** una proposizione composta che è ***sempre vera***, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni che la compongono.
  - Esempio: "un numero naturale è pari o dispari".
- Si definisce ***contraddizione*** una proposizione composta che è ***sempre falsa***, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni che la compongono.
  - Esempio: "un numero naturale è pari e dispari".

Implicazione

- È un connettivo che consente di costruire proposizioni del tipo: se p allora q.
- Si indica con: $p \Rightarrow q$
- La proposizione p si chiama **premessa**, la proposizione q viene detta **conseguenza**.
  - Esempio: "*Se* hai 6 in tutte le materie *allora* sei promosso".

Esempio

"Se hai 6 in tutte le materie allora sei promosso"

p: "hai sei in tutte le materie"

q: "sei promosso"

p	*q*	$p \Rightarrow q$	*Commento*
V	**V**	Hai 6 in tutte le materie e sei promosso	La regola è rispettata, la proposizione è *vera*.
V	**F**	Hai 6 in tutte le materie e non sei promosso	La regola non è rispettata, la proposizione è *falsa*.
F	**V**	Non hai 6 in tutte le materie e sei promosso	È *vera*: potresti avere voti superiori al 6 in tutte le materie e quindi non possiamo dire che la regola non sia stata rispettata.
F	**F**	Non hai 6 in tutte le materie e non sei promosso	La regola è rispettata, la proposizione è *vera*.

Tavola di verità dell'implicazione

L'implicazione $p \Rightarrow q$ è falsa soltanto nel caso in cui la premessa p è vera e la conseguenza q è falsa.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Modi di esprimere $p \Rightarrow q$

L'implicazione $p \Rightarrow q$ può, in matematica, essere espressa anche in uno dei seguenti modi:

- ❑ p è **condizione sufficiente** per q;
- ❑ q è **condizione necessaria** per p.

Per esempio, data l'implicazione "se hai 6 in tutte le materie, allora sei promosso" si ha che:

- ✓ avere 6 in tutte le materie è *condizione sufficiente* per essere promossi;
- ✓ essere promossi è *condizione necessaria* per avere 6 in tutte le materie.

Esempio

Costruire la tavola di verità della proposizione $\neg p \vee q$ e confrontala con quella dell'implicazione $p \Rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
V	**V**	F	V	V
V	**F**	F	F	F
F	**V**	V	V	V
F	**F**	V	V	V

Essendo identiche le tavole di verità delle due proposizioni, si dice che esse sono **logicamente equivalenti**.

Contronominale

Data la proposizione $p \Rightarrow q$, si definisce **contronominale** dell'implicazione data l'implicazione $\neg q \Rightarrow \neg p$.
Dimostriamo che una proposizione e la sua contronominale sono logicamente equivalenti.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	**V**	**V**	F	F	**V**
V	**F**	**F**	F	V	**F**
F	**V**	**V**	V	F	**V**
F	**F**	**V**	V	V	**V**

Inversa

Data la proposizione $p \Rightarrow q$, si definisce **inversa** dell'implicazione data l'implicazione $q \Rightarrow p$.

Dimostriamo che una proposizione e la sua inversa non sono logicamente equivalenti.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Contronominale e inversa: esempio

Data la proposizione "*se vivi a Palermo, allora vivi in Sicilia*" (VERA), si ha:

- ✓ contronominale: "*se non vivi in Sicilia, allora non vivi a Palermo*" (VERA);
- ✓ inversa: "*se vivi in Sicilia, allora vivi a Palermo*" (FALSA).

Doppia implicazione

La doppia implicazione $p \Leftrightarrow q$ è vera soltanto nel caso in cui la premessa p e la conseguenza q sono entrambe vere o entrambe false.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Condizione necessaria e sufficiente

Costruire la tavola di verità della proposizione logica:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	V	V	**V**

Enunciati aperti o predicati

Una proposizione che contiene una o più variabili, ognuna con valori scelti in un **dominio**, è un ***enunciato aperto*** o ***predicato***.

Il ***dominio*** è quindi l'insieme dei valori che si possono sostituire alle variabili.

Esempi

- "x è maggiore di 7", con x numero naturale
- "x è divisibile per 2", con x numero naturale

Insieme di verità

Dato un enunciato aperto $p(x)$, con $x \in U$, si definisce ***insieme di verità*** P il sottoinsieme di U degli elementi che sostituiti alla x rendono vero l'enunciato.

Esempio:

Dato l'enunciato "$x + 1$ è uguale a 3" con x che varia nell'insieme dei numeri naturali, l'insieme di verità è costituito dal solo numero naturale 2.

Quantificatore universale

- Viene utilizzato per affermare che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un insieme.
- Viene indicato col simbolo $\forall$ e si legge “per ogni”, “qualsiasi”.

Quantificatore esistenziale

- Viene utilizzato per affermare che una proprietà è vera <u>almeno</u> in un caso, quindi esiste almeno un elemento dell'insieme considerato per cui la proprietà è vera.
- Viene indicato col simbolo $\exists$ e si legge "esiste un", "esiste almeno un".

Osservazione

La negazione di formule scritte servendosi dei due quantificatori $\forall$ o $\exists$ **<u>scambiano</u>** uno dei due simboli con l'altro.

Esempio: Siano A l'insieme dei quadrilateri e $p(x)$: "x ha quattro lati uguali". La proposizione "non è vero che ogni quadrilatero ha i quattro lati uguali", in simboli $\neg(\forall x \in A \mid p(x))$, equivale alla proposizione "esiste almeno un quadrilatero che non ha i quattro lati uguali", in simboli $\exists x \in A \mid \neg p(x)$.

Deduzioni

Dicesi ***ragionamento*** una catena di affermazioni. Non tutte le affermazioni prodotte nel linguaggio comune sono corrette. Analizziamo i tre ragionamenti in cui la prima implicazione funge da assioma:

1° ragionamento: Se oggi piove, allora esco con l'ombrello.

Oggi piove.

quindi Esco con l'ombrello.

2° ragionamento: Se oggi piove, allora esco con l'ombrello.

Oggi non piove.

quindi Non esco con l'ombrello.

3° ragionamento: Se oggi piove, allora esco con l'ombrello.

Esco con l'ombrello.

quindi Piove.

Dei tre ragionamenti soltanto il primo è corretto! Infatti possiamo effettuare le seguenti considerazioni:

- nel primo ragionamento (corretto) la premessa dell'assioma è vera, di conseguenza è vera anche la conseguenza;
- nel secondo ragionamento (errato) la premessa dell'assioma è falsa, quindi la conseguenza può essere vera o falsa, infatti posso uscire lo stesso con l'ombrello;
- nel terzo ragionamento (errato) la conseguenza dell'assioma è vera, ma non possiamo dire che piove, in quanto posso essere uscito con l'ombrello a prescindere dal fatto che piova o meno.

Regole di deduzione

- Poiché la **dimostrazione** di un teorema deve essere una *catena di deduzioni logiche corrette*, bisogna stabilire quali **regole di deduzione** possono essere considerate corrette.
- Le due regole di deduzione che si utilizzano nelle dimostrazioni e che ci assicurano dei ragionamenti corretti sono le seguenti:

Regola del *modus ponens* (MP)	Se $p \Longrightarrow q$ è una proposizione vera e la premessa p è vera, allora possiamo dedurre che anche la conseguenza q è vera.
Regola del *modus tollens* (MT)	Se $p \Longrightarrow q$ è una proposizione vera e la conseguenza q è falsa, allora possiamo dedurre che anche la premessa p è falsa.

Dimostrazione diretta

Dicesi ***dimostrazione diretta*** una dimostrazione nella quale si assume come assioma la premessa p dell'implicazione $p \Longrightarrow q$ e si utilizzano delle catene di deduzione per arrivare alla verità di q.

Esempio: *Il prodotto di due numeri pari è un numero pari.*

Dimostrazione

1) Siano x e y due numeri pari.
2) Allora esistono due numeri interi h e k tali che $x = 2h$ e $y = 2k$.
3) Effettuiamo il prodotto: $xy = (2h)(2k) = 4hk = 2(2hk)$
4) Quindi il prodotto, essendo un multiplo di due, è pari.

Dimostrazione indiretta

§Si dice ***dimostrazione indiretta*** una dimostrazione nella quale anziché l'implicazione $p \Longrightarrow q$ si dimostra la sua contronominale $\neg q \Longrightarrow \neg p$.

Esempio: *Vogliamo dimostrare che se ABCD è un quadrato, allora ABCD è un parallelogramma.*

Dimostrazione

Se *ABCD* non fosse un parallelogramma, allora non può essere un quadrato.

Dal teorema generale al teorema particolare

- In matematica, i teoremi hanno valenza generale, ovvero sono relativi a proprietà generali di enti matematici e non riguardano singoli oggetti. Per tale ragione nei loro enunciati vengono utilizzati i cosiddetti quantificatori universali ed esistenziali.
- Quando trattiamo con i teoremi generali, per essi vale la seguente regola di deduzione:

Regola di particolarizzazione	Se una proposizione p è vera per ogni valore della variabile in un dato insieme di definizione, allora la proposizione risulta vera se si sostituisce un valore dell'insieme di definizione al posto della variabile.	**Esempio**: Se per ogni $x \in \mathbb{Z}$ si ha che $x \cdot 0 = 0$, allora anche $5 \cdot 0 = 0$.

Dimostrazione per assurdo

Dicesi ***dimostrazione per assurdo*** del teorema $p \Longrightarrow q$ la dimostrazione nella quale si considera come ipotesi la proposizione $\bar{q}$ e si arriva a una contraddizione tra l'ipotesi p e uno degli assiomi o teoremi noti come veri.

Esempio: Una dimostrazione per assurdo è quella utilizzata per dimostrare che la radice quadrata di 2 non è un numero razionale.

Dimostrazione mediante controesempio

Quando si vuol dimostrare che non tutti gli elementi di un determinato insieme godono di una certa proprietà, basta portare un esempio di elemento dell'insieme che non gode di quella proprietà.

Si definisce ***dimostrazione mediante controesempio*** della proposizione "*Nell'insieme A non vale la proprietà p*" una dimostrazione nella quale si individua un elemento dell'insieme *A* per il quale non vale la proprietà *p*.

Esempio: *Dimostrare che non tutti i numeri interi sono positivi.*

Dimostrazione

Basta considerare come controesempio il numero -2 che appartiene all'insieme dei numeri interi ma non è positivo.