"EQUAZIONI DI PRIMO GRADO"

Prof. E. Modica
www.competenzamatematica.it

IDENTITÀ ED EQUAZIONI

Si consideri l'uguaglianza:

$$A = B$$

se si sostituiscono al posto della A e della B dei numeri, si può verificare uno dei tre casi seguenti:

- l'uguaglianza $A = B$ è sempre vera;
- l'uguaglianza $A = B$ è sempre falsa;
- l'uguaglianza $A = B$ risulta vera solo per alcuni numeri e falsa per altri.

Se lo scopo è quello di determinare quali valori numerici si devono attribuire ad A e B affinché l'uguaglianza $A = B$ risulti vera, si dice che quest'ultima uguaglianza è un'equazione.

Definizione: Un'***identità*** è un'uguaglianza, dove compaiono espressioni letterali, verificata per qualunque valore attribuito alle lettere contenute nelle espressioni.

Sono esempi di uguaglianze:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $x + 6 = x + 6$
- $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Definizione 1: Si dice ***equazione*** un enunciato aperto il cui predicato è "***essere uguale***".

Definizione 2: Si dice equazione un'uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata solo per determinati valori delle lettere che vi compaiono.

Le variabili che compaiono in un'equazione prendono il nome di ***incognite*** e si indicano con le lettere finali dell'alfabeto $x, y, z, \ldots$

La forma generale di un'equazione è:

$$A(x) = B(x)$$

l'espressione $A(x)$ si dice ***primo membro*** dell'equazione, mentre l'espressione $B(x)$ si dice ***secondo membro***.

Definizione: Si dice ***soluzione*** o ***radice*** di un'equazione quel numero che, sostituito al posto della variabile, realizza l'uguaglianza.

In base al tipo di soluzione trovata, le equazioni vengono classificate come indicato nella seguente tabella.

Classificazione	***Insieme delle soluzioni***	***Esempio***
Possibile (nell'insieme A)	$S \neq \emptyset$	$2x = 4 \ in \ \mathbb{N}$
Impossibile (nell'insieme A)	$S = \emptyset$	$x + 2 = 1 \ in \ \mathbb{N}$
Determinata (nell'insieme A)	$S \subset A, S \ finito$	$x + 3x = 24 \ in \ \mathbb{Q}$
Indeterminata (nell'insieme A)	$S \subseteq A, S \ infinito$	$x + 3x = 4x \ in \ \mathbb{R}$

Definizione: Due equazioni si dicono ***equivalenti*** se ammettono le stesse soluzioni.

Esempio: Le equazioni $2x = 1$ e $6x = 3$ sono equivalenti in $\mathbb{Q}$.

I Principio di Equivalenza: *Sommando o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita (che sia definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Regola del trasporto: In ogni equazione un termine si può spostare da un membro all'altro, purché venga cambiato il segno.

Esempio: L'equazione $3x + 5 = x - 1$ è equivalente all'equazione $3x - x = -5 - 1$.

Regola di cancellazione: Se in ciascun membro di un'equazione compaiono le stesse quantità, queste si possono eliminare.

Esempio: L'equazione $3x + 5 + x = x - 1 + 3x - 7$ è equivalente all'equazione $3x - 5 + x = x - 1 + 3x - 5$.

II Principio di Equivalenza: *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita, che sia definita per ogni valore dell'incognita, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Regola 1: Se si cambiano i segni di tutti i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Esempio: L'equazione $3x + 5 = x - 1$ è equivalente all'equazione $-3x - 5 = -x + 1$.

Regola 2: Un'equazione con coefficienti frazionari si può trasformare in un'equazione equivalente con i coefficienti interi moltiplicando ciascun membro per il m.c.m. dei denominatori.

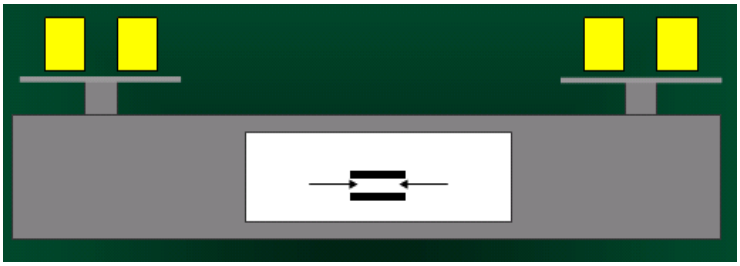
Esempio:

L'equazione $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x+1}{6}$ è equivalente all'equazione $2(x - 1) - 3x = x + 1$.

E. Modica, 2017/2018
WWW.COMPETENZAMATEMATICA.IT
SOME RIGHTS RESERVED

I due principi d'equivalenza possono dunque essere pensati come delle regole che permettono di aggiungere degli oggetti sui **due piatti di una bilancia** senza alterare l'equilibrio della bilancia, cioè senza far spostare l'ago dal segno "=". Se si aggiunge un oggetto su un solo piatto la bilancia non sarà più in equilibrio

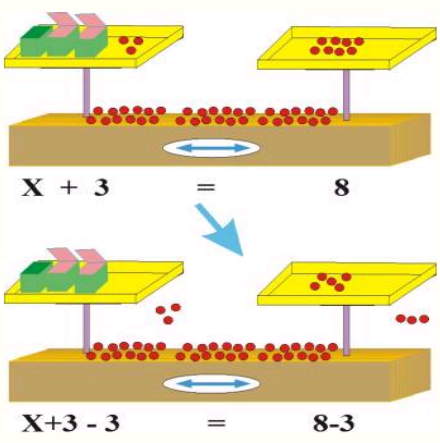
e sarà necessaria l'aggiunta di un altro oggetto sul piatto di sinistra per ristabilire l'equilibrio.



Se consideriamo l'equazione:

$$x + 3 = 8$$

si avrà la seguente situazione:



Per determinare il contenuto delle scatole, è necessario togliere tre biglie rosse dalla bilancia di sinistra; inoltre, per far sì che i due piatti rimangano in equilibrio, è necessario togliere tre biglie anche dal secondo piatto. In questo modo si otterrà:

$$x + 3 - 3 = 8 - 3$$

che non è la stessa equazione, ma è comunque equivalente a quella sopra considerata e che permette di asserire che $x = 5$.

SOME RIGHTS RESERVED

FORMA NORMALE E GRADO DI UN'EQUAZIONE

Definizione: Si definisce ***forma normale*** di un'equazione la scrittura:

$$P(x) = 0$$

Definizione: Si definisce ***grado*** di un'equazione, scritta in forma normale, il grado del polinomio $P(x)$.

Esempi

- L'equazione $x + 3 = 0$ ha grado 1.
- L'equazione $x^2 + 2x - 5 = 0$ ha grado 2.
- L'equazione $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 1$ ha grado 1.

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI PRIMO GRADO NUMERICA

Risolviamo adesso un'equazione di primo grado a un'incognita, scritta in forma normale, nella sua espressione più generale:

$$ax + b = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Applicando i principi d'equivalenza, si ottiene l'espressione

$$ax = -b$$

e quindi si possono presentare i tre casi:

I Caso: $a \neq 0 \implies \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \implies x = -\frac{b}{a} \implies S = \left\{-\frac{b}{a}\right\} \implies$ ***equazione determinata***;

II Caso: $a = 0 \ e \ b \neq 0 \implies 0x = -b \implies S = \emptyset \implies$ ***equazione impossibile***;

III Caso: $a = 0 \ e \ b = 0 \implies 0x = 0 \implies S = \mathbb{R} \implies$ ***equazione indeterminata***.

Esempi:

1. $x + 3x = 24 \implies 4x = 24 \implies x = \frac{24}{4} = 6$;
2. $3x + 1 = 3x \implies 1 = 0 \implies$ equazione impossibile;
3. $4x = 3x + x \implies 0 = 0 \implies$ equazione indeterminata.

SOME RIGHTS RESERVED