

Quesiti di geometria analitica dello spazio

Tratti dai temi degli Esami di Stato dal 2015 al 2025

Prof.re Erasmo Modica

Quesito 1. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Quesito 5, Sessione Ordinaria 2015

Soluzione.

Il piano è $\pi : x + y - z = 0$, quindi un vettore normale è $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$. La retta perpendicolare a π e passante per O ha direzione $\mathbf{n}$:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad (\text{in forma cartesiana } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}).$$

Quesito 2. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A(-3; 4; 0)$ e $C(-2; 1; 2)$. I tre punti O , A e C giacciono su un piano α . Determinare l'equazione che descrive il piano α .

Quesito 4, Sessione Suppletiva 2015

Soluzione.

Sia $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ il piano cercato. Poiché passa per $O(0, 0, 0)$, segue $d = 0$. Imponendo il passaggio per $A(-3, 4, 0)$ e $C(-2, 1, 2)$:

$$\begin{cases} -3a + 4b = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{4}a, \quad c = \frac{5}{8}a.$$

Sostituendo nell'equazione generica del piano si ha:

$$ax + \frac{3}{4}ay + \frac{5}{8}az = 0$$

Essendo $a \neq 0$, perché altrimenti $(a; b; c) = (0; 0; 0)$, dividiamo tutto per a e otteniamo:

$$\alpha : 8x + 6y + 5z = 0.$$

Quesito 3. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto $(1; 1; 1)$ al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.

Quesito 1, Simulazione MIUR - 10 dicembre 2015

Soluzione.

Il piano è $\pi : 2x - 3y + z = 0$, quindi un vettore normale è $\mathbf{n} = (2, -3, 1)$. La retta perpendicolare a π e passante per $P(1, 1, 1)$ è:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (\text{in forma cartesiana } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}).$$

Quesito 4. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione $x - 3y + z - 5 = 0$ e $x + 2y - z + 3 = 0$. Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r comune ad entrambi, verificare che essa appartiene al piano $\gamma : 3x + y - z + 1 = 0$.

Quesito 4, Sessione Straordinaria 2015

Soluzione.

La retta è data dall'intersezione dei due piani:

$$r : \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni ricaviamo y che sostituiamo nella seconda equazione:

$$r : \begin{cases} y = 2x - 2 \\ z = 5x - 1 \end{cases}$$

Ponendo $x = t$, otteniamo le equazioni parametriche di r :

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

Per verificare che la retta appartiene a γ , sostituiamo:

$$3t + (2t - 2) - (5t - 1) + 1 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

quindi $r \subset \gamma$.

Quesito 5. Date le rette

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1; 0; -2)$, determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Quesito 9, Sessione Ordinaria 2016

Soluzione.

La retta r ha direzione $\mathbf{v}_r = (1, 2, 1)$, mentre la retta s ha direzione $\mathbf{v}_s = (1, 2, -3)$. Il piano cercato è parallelo a r e s , dunque il suo vettore normale $\mathbf{n} = (a, b, c)$ deve essere tale che il suo prodotto scalare con i due vettori di direzione sia nullo:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \end{cases}$$

Il vettore normale al piano avrà quindi forma del tipo $\mathbf{n} = (-2b, b, 0)$. Scriviamo l'equazione del piano per P di vettore normale $\mathbf{n}$:

$$-2b(x - 1) + b(y - 0) + 0(z + 2) = 0 \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

Quesito 6. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2; -1; 2)$, è tangente al piano π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Quesito 5, Sessione Ordinaria 2016

Soluzione.

Il raggio R è la distanza del centro $K(-2, -1, 2)$ dal piano $\pi : 2x - 2y + z - 9 = 0$:

$$R = \frac{|2(-2) - 2(-1) + 2 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-9|}{3} = 3.$$

Scriviamo le equazioni parametriche della retta s passante per K e di direzione $\mathbf{n}_\pi = (2, -2, 1)$:

$$\ell : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Intersecando s con il piano π troviamo il valore di t che sostituito nelle equazioni parametriche si ci darà le coordinate del punto T :

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0 \Rightarrow 9t - 9 = 0 \Rightarrow t = 1,$$

quindi:

$$T = (0, -3, 3).$$

Quesito 7. I punti $A(3; 4; 1)$, $B(6; 3; 2)$, $C(3; 0; 3)$, $D(0; 1; 2)$ sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

Quesito 6, Sessione Suppletiva 2016

Soluzione.

Determino i vettori di direzione delle rette a cui appartengono i lati:

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 3, 3 - 4, 2 - 1) = (3, -1, 1), \quad \overrightarrow{DC} = (3 - 0, 0 - 1, 3 - 2) = (3, -1, 1),$$

$$\overrightarrow{BC} = (3 - 6, 0 - 3, 3 - 2) = (-3, -3, 1), \quad \overrightarrow{AD} = (0 - 3, 1 - 4, 2 - 1) = (-3, -3, 1).$$

Poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $ABCD$ è un parallelogramma. Per essere rettangolo deve valere $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$:

$$(3, -1, 1) \cdot (-3, -3, 1) = -9 + 3 + 1 = -5 \neq 0,$$

quindi non è un rettangolo.

Quesito 8. Determinare la distanza tra il punto $P(2; 1; 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

Quesito 7, Sessione Suppletiva 2016

Soluzione.

La retta è intersezione dei piani:

$$x + y = z + 1, \quad z = -y + 1.$$

Dalla seconda ricaviamo $y = 1 - z$ e sostituiamo nella prima $x + 1 - z = z + 1 \Rightarrow x = 2z$. Ponendo $z = t$:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_r = (2, -1, 1)$$

Scriviamo l'equazione del piano per $P(2, 1, 1)$ perpendicolare a r :

$$\pi : 2(x - 2) - (y - 1) + (z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - y + z - 4 = 0.$$

Determiniamo $r \cap \pi$ sostituendo le equazioni di r nell'equazione di π :

$$2(2t) - (1 - t) + t - 4 = 0 \Rightarrow 6t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{6}$$

$$H = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right).$$

La distanza cercata è data da:

$$PH = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Quesito 9. Dati i punti $A(4; 14; 17)$, $B(16; 11; 14)$, $C(16; 2; 23)$:

- si dimostri che il triangolo ABC è isoscele e rettangolo;
- quali sono le coordinate del punto D tale che $ABCD$ sia un quadrato?

Quesito 9, Americhe (boreale) 2016

Soluzione.

Determiniamo le lunghezze dei lati:

$$\overrightarrow{AB} = (12, -3, -3), \quad \overrightarrow{BC} = (0, -9, 9), \quad \overrightarrow{AC} = (12, -12, 6).$$

$$\overline{AB}^2 = \sqrt{144 + 9 + 9} = 9\sqrt{2}, \quad \overline{BC}^2 = \sqrt{0 + 81 + 81} = 9\sqrt{2} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$$

Stabiliamo se è rettangolo:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 \cdot 0 + (-3)(-9) + (-3)(9) = 27 - 27 = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ.$$

Quindi ABC è isoscele e rettangolo in B . Per determinare D , sfruttiamo la proprietà dei parallelogrammi per cui le diagonali si incontrano nel loro punto medio. Nel nostro caso deve essere $M_{BD} = M_{AC}$. Le coordinate del punto medio di AC sono: $M_{AC} = 10, 8, 20$ e quindi cerco $D(x_D, y_D, z_D)$ tale che:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = 10 \\ \frac{y_B + y_D}{2} = 8 \\ \frac{z_B + z_D}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = 26 \end{cases}$$

Quesito 10. Dati i punti $A(2; 4; -8)$ e $B(-2; 4; -4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A .

Quesito 4, Sessione Straordinaria 2016

Soluzione.

Il centro C della sfera coincide con il punto medio di AB :

$$C = \left(\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{4 + 4}{2}, \frac{-8 + (-4)}{2} \right) = (0, 4, -6).$$

Il raggio è dato dalla distanza tra A e C

$$r = \overline{AC} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

L'equazione della sfera sarà quindi:

$$\mathcal{S}: x^2 + (y - 4)^2 + (z + 6)^2 = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 12z + 44 = 0$$

Il piano tangente in A avrà come vettore normale la direzione $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$:

$$-2(x - 2) + 0(y - 4) + 2(z + 8) = 0 \Rightarrow x - z - 10 = 0$$

Quesito 11. Dati i punti $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(0; -1; -2)$, $D(1; 1; 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A , B , C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α .

Quesito 9, Sessione Straordinaria 2016

Soluzione.

Determiniamo le equazioni parametriche della retta passante per A e B la cui direzione è $\overrightarrow{AB} = (3, 1, 1)$:

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane saranno:

$$\frac{x+2}{3} = y = z-1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-3y+2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

Consideriamo il fascio di piani avente come sostegno r :

$$h(x-3y+2) + k(y-z+1) = 0$$

e imponiamo il passaggio per C :

$$h(0+3+2) + k(-1+2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{5}{2}h$$

Sostituendo nell'equazione del fascio e dividendo tutto per $h \neq 0$, si ottiene:

$$x-3y+2 - \frac{5}{2}(y-z+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha : 2x-11y+5z-1=0$$

La retta s cercata passa per D e ha direzione $\mathbf{n}_\alpha = (2, -11, 5)$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 11\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

Quesito 12. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano $\alpha : x + 2y - z + 2 = 0$, determinare per quale valore di k la retta r e il piano α sono paralleli, e la distanza tra di essi.

Quesito 9, Simulazione MIUR - 29 aprile 2016

Soluzione.

La direzione della retta r è data dal vettore $\mathbf{v} = (2, 1, k)$, mentre il vettore normale al piano $\alpha : x + 2y - z + 2 = 0$ è $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$. Retta e piano sono paralleli se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, cioè:

$$(2, 1, k) \cdot (1, 2, -1) = 2 + 2 - k = 0 \Rightarrow k = 4.$$

La distanza tra r e α è data dalla distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano. Per $t = 0$ otteniamo il punto della retta $P = (1, 1, 0)$. Determiniamo quindi la distanza:

$$d = \frac{|1 + 2 \cdot 1 - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

Quesito 13. Dati i punti $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; 2; -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C .

Soluzione.

Determiniamo il vettore di direzione $\overrightarrow{AB} = (5, -3, -2)$. Le equazioni parametriche della retta per A di direzione $\overrightarrow{AB}$ sono:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Il piano π perpendicolare a r e passante per $C(2, 2, -3)$ ha quindi vettore normale $\mathbf{n}_\pi = \overrightarrow{AB}$:

$$5(x - 2) - 3(y - 2) - 2(z + 3) = 0 \Rightarrow 5x - 3y - 2z - 10 = 0.$$

Quesito 14. Dato il piano $\pi : x + 2y - z + 1 = 0$ ed il suo punto $P(1; 0; 2)$, si determinino le sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti a π in P .

Quesito 7, Sessione Ordinaria 2017

Soluzione.

I centri della sfera appartengono alla retta passante per P e perpendicolare al piano π . Scriviamo quindi le equazioni parametriche della retta, considerando come vettore di direzione il vettore normale $\mathbf{n}_\pi = (1, 2, -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Le coordinate parametriche dei centri saranno quindi $C(1+t, 2t, 2-t)$. Essendo la distanza tra P e C uguale al raggio, imponiamo che $\overline{PC} = \sqrt{6}$:

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = 6 \Rightarrow t = \mp 1$$

I centri delle sfere saranno quindi $C_1(2, 2, 1)$ e $C_2(0, -2, 3)$. Le equazioni delle due sfere cercate saranno:

$$\mathcal{S}_1 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 3 = 0,$$

$$\mathcal{S}_2 : x^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 7 = 0$$

Quesito 15. In un sistema di riferimento cartesiano il piano $\alpha : 3x - 4y - 22 = 0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $C(3; 3; 0)$. Determinare l'equazione della sfera.

Quesito 6 modificato, Sessione Straordinaria 2017

Soluzione.

Il raggio della sfera cercata sarà uguale alla distanza del centro $C(3, 3, 0)$ dal piano tangente $\alpha : 3x - 4y - 22 = 0$:

$$R = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|9 - 12 - 22|}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

Quindi:

$$\mathcal{S} : (x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 7 = 0$$

Quesito 16. Determinare la distanza tra il punto $P(6; 6; 8)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

Quesito 6, Sessione Suppletiva 2017

Soluzione.

Determiniamo le equazioni parametriche della retta r . Dalla seconda equazione ricavo $y = z - 1$ e, sostituendo nella prima, si ha $x - (z - 1) = 2z + 1 \Rightarrow x = 3z$. Poniamo $z = t$ e otteniamo:

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v} = (3, 1, 1)$$

Scriviamo l'equazione del piano per $P(6, 6, 8)$ perpendicolare a r , che ha come vettore normale il vettore di direzione di r :

$$\pi : 3(x - 6) + (y - 6) + (z - 8) = 0 \Rightarrow 3x + y + z - 32 = 0.$$

Determiniamo l'intersezione $r \cap \pi$:

$$3(3t) + (t - 1) + t - 32 = 0 \Rightarrow 11t - 33 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow H = (9, 2, 3).$$

La distanza cercata sarà:

$$\overline{PH} = \sqrt{(6-9)^2 + (6-2)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Quesito 17. Determinare l'equazione della superficie sferica $\mathcal{S}$, con centro sulla retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

tangente al piano $\pi : 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $T = (-4; 0; 1)$.

Quesito 6, Sessione Ordinaria 2018

Soluzione.

La sfera è tangente al piano $\pi : 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $T(-4, 0, 1)$. Il centro C sta sulla normale a π passante per T e anche sulla retta r , per cui le sue coordinate parametriche sono $C(t, t, t)$. Imponiamo che siano paralleli i vettori $\overrightarrow{CT} = (t + 4, t, t - 1)$ e $\mathbf{n}_\pi$:

$$\frac{t+4}{3} = \frac{t}{-1} = \frac{t-1}{-2} \Rightarrow 2t = t-1 \Rightarrow t = -1.$$

Quindi $C = (-1, -1, -1)$ e il quadrato del raggio sarà dato da:

$$R^2 = \overline{CT}^2 = (-3)^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

Da qui:

$$\mathcal{S} : (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 14 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Quesito 18. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$, $C(1; 1; 2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano $\alpha : x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.

Quesito 9, Sessione Ordinaria 2018

Soluzione.

Determiniamo le lunghezze dei tre lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}; \quad \overline{AC} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad \overline{BC} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

Il triangolo ABC giace sul piano $\alpha : x + y + z - 4 = 0$, in quanto le coordinate dei punti soddisfano l'equazione del piano. Affinché il tetraedro sia regolare, i punti P devono appartenere alla normale al piano passante per il baricentro del triangolo ABC . Il baricentro ha coordinate:

$$G\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Le equazioni parametriche della retta perpendicolare al piano per G e direzione $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ sono:

$$r : \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \lambda \\ y = \frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{4}{3} + \lambda \end{cases}$$

Per un tetraedro regolare deve essere $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ e $\overline{PA} = \overline{AB}$. Poiché $\overline{AB}^2 = 8$, imponiamo $\overline{PA}^2 = 8$ con $P\left(\frac{7}{3} + \lambda, \frac{1}{3} + \lambda, \frac{4}{3} + \lambda\right)$:

$$\begin{aligned} PA^2 &= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\lambda + \frac{4}{3}\right)^2 = 8 \\ \Rightarrow 3\lambda^2 &= \frac{16}{3} \Rightarrow \lambda = \mp \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Quindi

$$P_1 = (3, 1, 2), \quad P_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Quesito 19. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x; y; z)$ equidistanti dai punti $A(0; 1; 2)$ e $B(-3; 2; 0)$.

Quesito 9, Sessione Suppletiva 2018

Soluzione.

Imponiamo l'uguaglianza tra i quadrati delle distanze del generico punto $P(x, y, z)$ dai punti $A(0, 1, 2)$ e $B(-3, 2, 0)$:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

cioè:

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + 1 + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 9 + 4$$

Semplificando si ottiene il luogo:

$$3x - y + 2z + 4 = 0$$

che rappresenta il piano assiale.

Quesito 20. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2; 2; 2)$ tangente al piano di equazione $x + 2y + z = 12$.

Quesito 2, Sessione Straordinaria 2018

Soluzione.

Per determinare il raggio, basta calcolare la distanza del centro $C(2, 2, 2)$ dal piano $x + 2y + z - 12 = 0$:

$$R = \frac{|2 + 4 + 2 - 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Quesito 21. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $(1; 1; 1)$ al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.

Quesito 8, Sessione Straordinaria 2018

Soluzione.

Scriviamo le equazioni parametriche della retta perpendicolare a π in $P(1, 1, 1)$ di direzione direzione $\mathbf{n} = (2, -1, -1)$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Il generico punto della retta avrà coordinate $K(1 + 2t, 1 - t, 1 - t)$. Imponiamo che $d(K, \alpha) = 6$:

$$d(K; \alpha) = \frac{|2(1 + 2t) - (1 - t) - (1 - t)|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|6t|}{\sqrt{6}} = |t|\sqrt{6} = 6$$

Quindi:

$$|t|\sqrt{6} = 6 \Rightarrow |t| = \sqrt{6} \Rightarrow t = \pm\sqrt{6}.$$

Le coordinate dei punti cercati sono:

$$P_1(1 + 2\sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}), \quad P_2(1 - 2\sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$$

Quesito 22. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1; -1; 2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

Quesito 3, Sessione Suppletiva 2018

Soluzione.

Il raggio della sfera è uguale alla distanza del centro $C(1, -1, 2)$ dal piano $\alpha : x - y + z - 10 = 0$.

$$R = \frac{|1 - (-1) + 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

L'equazione della sfera è quindi:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 6 = 0$$

Il punto di contatto T è la proiezione di C su α lungo la direzione $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione del piano si ha:

$$(1 + \lambda) - (-1 - \lambda) + (2 + \lambda) = 10 \Rightarrow 4 + 3\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 2,$$

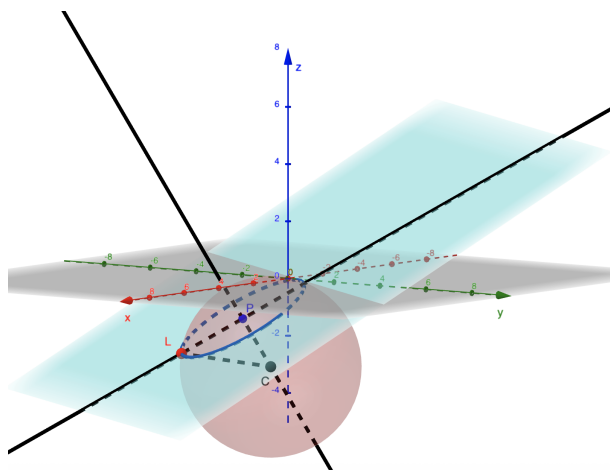
quindi $T = (3, -3, 4)$.

Quesito 23. Si consideri la superficie sferica $\mathcal{S}$ di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0.$$

- Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie $\mathcal{S}$ sono secanti.
- Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e $\mathcal{S}$.

Quesito 5, Simulazione MIUR – 28 febbraio 2019



Soluzione.

Dall'equazione della sfera ricaviamo le coordinate del centro $C(1, 0, 3)$ e il raggio $R = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Per determinare se piano e sfera sono secanti, determiniamo la distanza del centro dal piano:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6(-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|3 - 18 + 1|}{7} = \frac{14}{7} = 2.$$

Poiché $d < R$, piano e sfera sono secanti. Per determinare il raggio della circonferenza basta applicare il teorema di pitagora al triangolo CPL :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}.$$

Quesito 24. Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2; 0; 1)$ e $B(0; 2; 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5; 1; -2)$ e $D(1; 3; 4)$.

Quesito 4, Simulazione MIUR – 2 aprile 2019

Soluzione.

Le equazioni parametriche della retta per $A(-2, 0, 1)$ e $B(0, 2, 1)$ ha direzione $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 0)$:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Imponiamo che il generico punto $P(2t, 2 + 2t, 1)$ sia tale che $PC^2 = PD^2$ con $C(5, 1, -2)$, $D(1, 3, 4)$:

$$(2t - 5)^2 + (2t + 1)^2 + 9 = (2t - 1)^2 + (2t - 1)^2 + 9 \Rightarrow t = 3.$$

Quindi il punto richiesto è

$$P = (6, 8, 1)$$

Quesito 25. Dati i punti $A(2; 0; -1)$ e $B(-2; 2; 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$ è costituito da una superficie sferica $\mathcal{S}$ e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10; 8; 7)$ appartiene a $\mathcal{S}$ e determinare l'equazione del piano tangente in T a $\mathcal{S}$.

Quesito 4, Sessione Ordinaria 2019

Soluzione.

Sia $P(x, y, z)$ e imponiamo che $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2[(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2]$$

Sviluppando e riducendo:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

dunque $C = (-6, 4, 3)$. Sostituiamo le coordinate del punto $T(-10, 8, 7)$ nell'equazione trovata per effettuare la verifica:

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0$$

quindi $T \in \mathcal{S}$. Determiniamo adesso il piano tangente in T che ha vettore normale $\overrightarrow{CT} = (-4, 4, 4)$:

$$-4(x + 10) + 4(y - 8) + 4(z - 7) = 0 \Rightarrow x - y - z + 25 = 0$$

Quesito 26. Considerati i punti $A(2; 3; 6)$, $B(6; 2; -3)$, $C(3; -6; 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA , OB , OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera $\mathcal{S}$ circoscritta a tale cubo.

Quesito 4, Sessione Suppletiva 2019

Soluzione.

Determiniamo le lunghezze dei tre segmenti:

$$\overline{OA}^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49, \quad \overline{OB}^2 = 6^2 + 2^2 + (-3)^2 = 49, \quad \overline{OC}^2 = 3^2 + (-6)^2 + 2^2 = 49$$

I vettori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ devono essere a due a due ortogonali:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12 + 6 - 18 = 0; \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 6 - 18 + 12 = 0; \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 18 - 12 - 6 = 0$$

Quindi OA, OB, OC sono tre spigoli mutuamente perpendicolari di un cubo di lato 7. Scriviamo l'equazione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ passante per i quattro punti dati:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 4 + 9 + 36 + 2a + 3b + 6c = 0 \\ 36 + 4 + 9 + 6a + 2b - 3c = 0 \\ 9 + 36 + 4 + 3a - 6b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -11 \\ b = 1 \\ c = -5 \\ d = 0 \end{cases}$$

e sostituendo si ha:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 11x + y - 5z = 0$$

Il centro avrà coordinate $C\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e il raggio avrà misura $R = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Quesito 27. Dopo aver verificato che il punto $T(1; 0; 1)$ appartiene al piano $\pi : x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1; 0; 5)$ e tangente in T al piano π .

Quesito 4, Sessione Straordinaria 2019

Soluzione.

Sostituendo le coordinate di T nell'equazione di π , si ottiene un'uguaglianza, quindi $T \in \pi$. Scriviamo l'equazione della retta per T di direzione $\mathbf{n}_\pi = (1, -2, 2)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Il centro $C(1 - t, -2t, 1 + 2t)$ della sfera ha la stessa distanza da T e da P :

$$\overline{CT}^2 = \overline{CP}^2 \Rightarrow t^2 + 4t^2 + 4t^2 = t^2 + 4t^2 + 4t^2 + 16 - 16t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Quindi $C(2, -2, 3)$ e $R = \overline{CT} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. L'equazione della sfera è:

$$\mathcal{S} : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$$

Quesito 28. Sono assegnati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(-1; 3; 2)$, $B(3; 4; 2)$, $C(5; 1; 4)$, $D(1; 0; 4)$. Dopo aver dimostrato che $ABCD$ è un rombo, determinare l'area di tale rombo ed il raggio della circonferenza in esso inscritta.

Quesito 4, Americhe (boreale) 2019

Soluzione.

Determiniamo le direzioni dei lati:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 1, 0), \quad \overrightarrow{BC} = (2, -3, 2), \quad \overrightarrow{CD} = (-4, -1, 0), \quad \overrightarrow{DA} = (-2, 3, -2)$$

quindi sono a due a due parallele. Determiniamo le lunghezze dei lati:

$$\overline{AB}^2 = 17, \quad \overline{BC}^2 = 17, \quad \overline{CD}^2 = 17, \quad \overline{DA}^2 = 17 \Rightarrow ABCD \text{ è un rombo.}$$

Le misure delle diagonali sono:

$$\overline{AC} = \sqrt{36 + 4 + 4} = \sqrt{44}, \quad \overline{BD} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$$

L'area è data da:

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{AC} \overline{BD}}{2} = \frac{(2\sqrt{11})(2\sqrt{6})}{2} = 2\sqrt{66}.$$

Il perimetro del rombo è dato da $2p = 4\sqrt{17}$ e, ricordando che il raggio r è il rapporto dell'area sul semiperimetro, si ha:

$$r = \frac{\mathcal{A}}{s} = \frac{2\sqrt{66}}{2\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{66}{17}}$$

Quesito 29. Considerata la retta r passante per i due punti $A(1; -2; 0)$ e $B(2; 3; -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1; -6; 7)$ e tangente a r .

Quesito 3, Sessione Ordinaria 2023

Soluzione.

Scriviamo l'equazione della retta r per $A(1, -2, 0)$ e di direzione $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione del piano π passante per C e perpendicolare a r :

$$\pi : (x - 1) + 5(y + 6) - (z - 7) = 0 \Rightarrow x + 5y - z + 36 = 0.$$

Sostituendo le equazioni parametriche di r si ha:

$$(1 + t) + 5(-2 + 5t) - (-t) + 36 = 0 \Rightarrow 27t + 27 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Quindi $T = (0, -7, 1)$ e

$$R^2 = \overline{CT}^2 = (1 - 0)^2 + (-6 + 7)^2 + (7 - 1)^2 = 1 + 1 + 36 = 38.$$

La sfera avrà quindi equazione:

$$\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 38 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0$$

Quesito 30. Assegnate le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s .

Quesito 3, Sessione Straordinaria 2023

Soluzione.

Stabiliamo se le rette hanno punti in comune, sostituendo in s le equazioni di r :

$$r : \begin{cases} 1 + t = 1 \\ 2t - 1 - 4t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi le rette non hanno punti in comune. Nel fascio di rette di sostegno $r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$

determiniamo il piano parallelo a $s : \begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$

$$h(x - y - 1) + k(4y - z + 1) = 0 \Rightarrow hx + (-h + 4k)y - kz - h + k = 0$$

Imponiamo che il vettore normale al piano $\mathbf{n} = (h, -h + 4k, -k)$ sia ortogonale a $\mathbf{v}_s = (0, 1, 2)$:

$$-h + 4k - 2k = 0 \Rightarrow h = 2k$$

Sostituendo e dividendo per $k \neq 0$ si ha: $2x + 2y - z - 1 = 0$.

Quesito 31. Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1; 2; 3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.

Quesito 3, Sessione Suppletiva 2023

Soluzione.

Determiniamo le equazioni parametriche della retta passante per P di direzione $\mathbf{n}_\alpha = (3, 4, -5)$:

$$s : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

Poiché $C \in s$, le sue coordinate parametriche saranno $C(-1 + 3t, 2 + 4t, 3 - 5t)$. Imponiamo che la distanza di C da P sia uguale a $5\sqrt{2}$:

$$9t^2 + 16t^2 + 25t^2 = 50 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

I centri delle sfere cercate avranno coordinate $C_1(2, 6, -2)$ e $C_2(-4, -2, 8)$. Le equazioni delle sfere cercate saranno:

$$\mathcal{S}_1 : (x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 50 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 4z - 6 = 0,$$

$$\mathcal{S}_2 : (x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-8)^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 16z + 34 = 0$$

Quesito 32. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano $\pi : 3x - 2y + 5 = 0$.

- Determinare le coordinate del punto H , proiezione ortogonale di $P(4; 2; 1)$ sul piano π ;
- Determinare l'intersezione della retta $s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π .

Quesito 3, Sessione Ordinaria 2024

Soluzione.

Scriviamo le equazioni parametriche della retta passante per P di direzione $\mathbf{n}_\pi = (3, -2, 0)$:

$$r : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Imponendo $r \cap \pi$:

$$3(4 + 3t) - 2(2 - 2t) + 5 = 0 \Rightarrow 13t + 13 = 0 \Rightarrow t = -1$$

quindi

$$H = (1, 4, 1)$$

Per determinare $s \cap \pi$ mettiamo a sistema le equazioni cartesiane di s con l'equazione di π : In π :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Il punto cercato è quindi $P(-3, -2, 2)$.

Quesito 33. Il centro di una superficie sferica $\mathcal{S}$ è il punto di intersezione tra la retta r individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta t passante per i punti $A(-2; 3; 0)$ e $B(2; -1; 2)$. La superficie $\mathcal{S}$ è inoltre tangente al piano α di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$. Qual è l'equazione di $\mathcal{S}$?

Quesito 3, Sessione Straordinaria 2024

Soluzione.

Scriviamo le equazioni parametriche della retta t passante per A e di direzione $\overrightarrow{AB} = (4, -4, 2)$:

$$t : \begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = 3 - 4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Intersechiamo le rette r e t sostituendo le equazioni di t in quelle di r :

$$\begin{cases} -2 + 4\lambda + 3 - 4\lambda - 4\lambda = 0 \\ -6 + 12\lambda + 6 - 8\lambda - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il centro avrà quindi coordinate $C\left(-1, 2, \frac{1}{2}\right)$. Per determinare il raggio, determiniamo la distanza di C dal piano $\alpha : 4x - 2y - 4z + 1 = 0$:

$$R = \frac{|4(-1) - 2(2) - 4(\frac{1}{2}) + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Quindi l'equazione della sfera è:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - z + 3 = 0$$

Quesito 34. Verificare che i punti $O(0; 0; 0)$, $A(1; 4; 8)$, $B(-6; 0; 12)$ e $C(-7; -4; 4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero $OABC$ e classificarlo.

Quesito 3, Sessione Suppletiva 2024

Soluzione.

Verifichiamo che i punti stanno sullo stesso piano. Scriviamo le equazioni cartesiane della retta r passante per A di direzione $\overrightarrow{OA} = (1, 4, 8)$:

$$r : x - 1 = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 8}{8} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 0 \\ 8x - z = 0 \end{cases}$$

Nel fascio di piani di sostegno r cerchiamo quello passante per B :

$$h(4x - y) + k(8x - z) = 0$$

Sostituiamo le coordinate di B :

$$h(-24) + k(-48 - 12) = 0 \Rightarrow h = -\frac{5}{2}k$$

Sostituendo nell'equazione del fascio di piani e dividendo per $k \neq 0$ si ottiene:

$$-20x + 5y + 16x - 2z \Rightarrow 4x - 5y + 2z = 0$$

Verifichiamo adesso che le coordinate di C soddisfano l'equazione del piano appena trovato:

$$-28 + 20 + 8 = 0$$

quindi i quattro punti sono complanari.

Determiniamo adesso i vettori di direzione dei lati:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 4, 8), \overrightarrow{AB} = (-7, -4, 4), \overrightarrow{BC} = (-1, -4, -8), \overrightarrow{CA} = (-7, -4, 4).$$

I vettori sono a due a due paralleli, quindi $OABC$ è un parallelogramma. Calcoliamo le lunghezze dei lati:

$$\overline{OA} = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9, \overline{AB} = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9, \overline{BC} = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9,$$

$$\overline{CO} = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9$$

Si tratta quindi di un rombo. Osserviamo che si tratta di un rombo e non di un quadrato in quanto $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 9 \neq 0$. Per determinare l'area basta calcolare:

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{OB} \overline{AC}}{2} = \frac{(6\sqrt{5})(12)}{2} = 36\sqrt{5}.$$

Il perimetro è invece dato da:

$$\mathcal{P} = 4 \cdot 9 = 36.$$

Quesito 35. Si considerino la superficie sferica di equazione

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$$

e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + d = 0$. Discutere, al variare del parametro reale d , se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.

Quesito 2, Sessione Ordinaria 2025

Soluzione.

Per discutere la mutua posizione tra sfera e piano, è necessario determinare la distanza del centro $C(1, 2, 0)$ dal piano π e confrontarla con il raggio. La distanza del centro dal piano è data da:

$$d = \frac{|1 - 4 - 0 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|d - 3|}{3}.$$

Confrontiamo con $R = 1$:

$$\begin{cases} \text{secante} & \iff \frac{|d-3|}{3} < 1 \iff |d-3| < 3 \iff 0 < d < 6, \\ \text{tangente} & \iff \frac{|d-3|}{3} = 1 \iff d = 0 \text{ o } d = 6, \\ \text{esterna} & \iff \frac{|d-3|}{3} > 1 \iff d < 0 \text{ o } d > 6. \end{cases}$$

Per dividere la sfera in due parti uguali il piano deve passare per il centro:

$$1 - 4 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = 3.$$

Quesito 36. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ sono date le equazioni di due rette:

$$r : \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x - z = 4 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene. Verificare che la sfera di centro $C = (5; -7; 2)$ passante per il punto $P = (1; -1; 0)$ è tangente al piano suddetto.

Quesito 4, Sessione Suppletiva 2025

Soluzione.

Determiniamo $r \cap s$ sostituendo le equazioni di s in quelle di r :

$$r : \begin{cases} t - 3 + t - 1 = 0 \\ 1 + 2t - 3 + t - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Il punto d'intersezione ha coordinate $P(5, 2, 1)$.

Nel fascio di rette di piani di sostegno r determiniamo quello passante per un qualsiasi punto appartenente a s , per esempio $Q(1, 0, 3)$:

$$h(y - z - 1) + k(x - z - 4) = 0 \Rightarrow h(0 - 3 - 1) + k(1 - 3 - 4) = 0 \Rightarrow h = -\frac{3}{2}k$$

Sostituendo e semplificando si ottiene il piano $\alpha : 2x - 3y + z - 5 = 0$.

La sfera di centro $C(5, -7, 2)$ passante per $P(1, -1, 0)$ è tangente al piano se la distanza tra C e P è uguale alla distanza di C dal piano α :

$$R = \overline{CP} = \sqrt{16 + 36 + 4} = 2\sqrt{14};$$

$$d(C, \alpha) = \frac{|2 \cdot 5 - 3(-7) + 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

Quindi la sfera è tangente al piano.

Quesito 37. Mostrare che, nello spazio tridimensionale, il piano di equazione $x + 2y - 3z - 7 = 0$ è tangente alla superficie sferica $\mathcal{S}$ di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$$

e stabilire le coordinate del punto di tangenza T . Scrivere, inoltre, l'equazione di una retta che sia tangente alla superficie $\mathcal{S}$ nel punto T .

Quesito 4, Sessione Straordinaria 2025

Soluzione.

Determiniamo il centro e il raggio della sfera: $C(1, -1, 2)$ e $R = \sqrt{1 + 1 + 4 + 8} = \sqrt{14}$. Determiniamo la distanza del centro dal piano $\pi : x + 2y - 3z - 7 = 0$:

$$d = \frac{|1 + 2(-1) - 3 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} = R,$$

quindi π è tangente.

Per determinare il punto di tangenza, scriviamo l'equazione della retta passante per C di direzione $\mathbf{n}_\pi = (1, 2, -3)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Sostituiamo tali equazioni nell'equazione del piano π :

$$1 + t + 2(-1 + 2t) - 3(2 - 3t) - 7 = 0 \Rightarrow 1 + t - 2 + 4t - 6 + 9t - 7 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Il punto di tangenza ha coordinate $T(2, 1, -1)$. Per determinare l'equazione della retta basta scrivere l'equazione della retta passante per T e per un punto $A \in \pi$ che sia diverso da T , per esempio $A(1, 3, 0)$. Quindi, essendop $\overrightarrow{TA} = (-1, 2, 1)$, si ha:

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = k \end{cases}$$