

Probabilità condizionata e Teorema di Bayes



Indice

1 Perché serve la probabilità condizionata 1

2 Probabilità condizionata: il punto di partenza 1

2.1 Che cosa significa davvero $p(A \mid B)$ 1

2.2 La formula della probabilità condizionata 2

3 Esempi sulla probabilità condizionata 3

3.1 Esempio 1: il dado 3

3.2 Esempio 2: gettoni numerati da 1 a 12 3

3.3 Esempio 3: carte da gioco 4

3.4 Esempio 4: sportivi in una classe 4

4 Il prodotto logico: moltiplicare lungo un percorso 5

5 Che cos'è una partizione 6

6 La formula di disintegrazione 6

6.1 Quando si usa 6

6.2 Il grafo della disintegrazione 7

7 Esempi sull'uso della formula di disintegrazione 7

7.1 Esempio D1: due urne prima di vedere la pallina 7

7.2 Esempio D2: mezzi di trasporto e ritardo 8

7.3 Esempio D3: produzione di tre macchine 9

8 Il teorema di Bayes 10

8.1 Il problema inverso rispetto alla disintegrazione 10

8.2 Enunciato del teorema di Bayes 10

8.3 Perché il teorema di Bayes è vero? 11

8.4 Il caso di due sole cause 11

9 Disintegrazione e teorema di Bayes: differenze 11

10 Esempi sul teorema di Bayes 12

10.1 Esempio B1: due macchine, pezzo difettoso 12

10.2 Esempio B2: tre macchine, pezzo difettoso 13

10.3 Esempio B3: tre urne e pallina nera 13

10.4 Esempio B4: test medico e falsi positivi 14

10.5 Lo stesso esempio con le frequenze 15

10.6 Esempio B5: spam e parola sospetta 16

11 Ulteriori esempi aggiuntivi	17
11.1 Esempio 1: due urne e una pallina bianca	17
11.2 Esempio 2: due macchine e un pezzo difettoso	18
11.3 Esempio 3: test medico e falso positivo	19
11.4 Esempio 4: tre fornitori	20
11.5 Esempio 5: spam e parola sospetta	21
11.6 Esempio 6: urna nascosta	22
11.7 Metodo alternativo: trasformare le percentuali in frequenze	23
11.8 Come riconoscere il tipo di esercizio	24
12 Metodo operativo per risolvere gli esercizi	25
13 Errori tipici da evitare	25
14 Esercizi guidati	26
15 Ulteriori esercizi guidati	27
16 Esercizi proposti	29
17 Risoluzioni	29

Perché serve la probabilità condizionata

L'idea centrale

Nel calcolo delle probabilità non basta contare i casi favorevoli. Bisogna prima chiedersi: **quali sono i casi ancora possibili?**

Questa domanda è decisiva. Quando riceviamo un'informazione nuova, alcuni casi che prima erano possibili diventano impossibili. Da quel momento non possiamo più ragionare come se l'universo fosse quello iniziale: dobbiamo restringere lo spazio campionario.

Facciamo un esempio molto semplice. Se lancio un dado, i casi possibili sono

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Se però qualcuno mi dice: “è uscito un numero maggiore di 3”, allora non ha più senso ragionare su tutti e sei i numeri. I casi ancora possibili sono solo

$$\{4, 5, 6\}.$$

Questa è l'idea della probabilità condizionata: **calcolare una probabilità dopo aver ricevuto un'informazione.**

Nota importante

In questa dispensa useremo la notazione

$$p(A \mid B)$$

che si legge: “probabilità di A sapendo che B è accaduto” o “probabilità di A dato B ”. L'evento scritto dopo la barretta verticale, cioè B , è l'informazione già conosciuta.

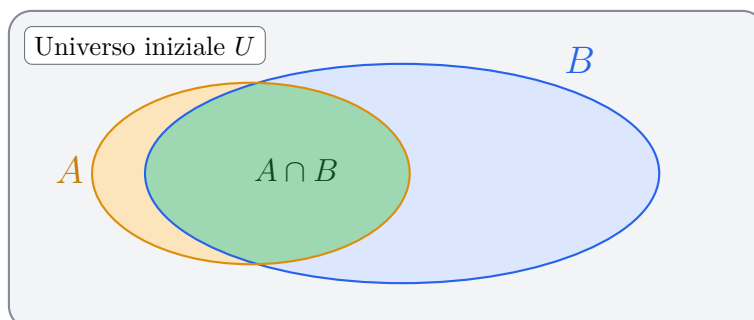
Probabilità condizionata: il punto di partenza

Che cosa significa davvero $p(A \mid B)$

Dire $p(A \mid B)$ non significa chiedere semplicemente “quanto è probabile A ?”. Significa chiedere:

Tra tutti i casi in cui B è vero, in quanti è vero anche A ?

Per questo motivo B diventa il nuovo universo di riferimento. Non guardiamo più tutto U , ma guardiamo solo la parte di U in cui B si verifica. Dentro questa parte cerchiamo anche A .



Per calcolare $p(A \mid B)$, considero B come nuovo riferimento e confronto la probabilità di $A \cap B$ con la probabilità di B .

La formula della probabilità condizionata

Definizione

Se $p(B) > 0$, la probabilità di A condizionata a B è

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Attenzione al denominatore: nella formula di $p(A | B)$ il denominatore è $p(B)$, non $p(A)$. Il motivo è che B è **l'informazione già certa**. Dunque B è il nuovo ambiente in cui stiamo ragionando.

Perchè si divide per $p(B)$?

Immaginiamo che tutti i casi siano equiprobabili. Allora

$$p(A | B) = \frac{\text{casi favorevoli ad } A \text{ tra quelli in cui } B \text{ è vero}}{\text{casi in cui } B \text{ è vero}}.$$

I casi favorevoli ad A , sapendo B , sono i casi in cui A e B sono entrambi veri, cioè $A \cap B$. I casi totali, dopo l'informazione, sono quelli di B . Quindi

$$p(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $|U|$, otteniamo:

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|U|}}{\frac{|B|}{|U|}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

La divisione per $p(B)$ serve a **rinormalizzare**: stiamo dicendo che, dentro il nuovo universo B , la probabilità totale deve tornare a valere 1.

Errore tipico

La formula corretta è

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

La formula

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

calcola invece $p(B | A)$, cioè una probabilità diversa.

Esempi sulla probabilità condizionata

Esempio 1: il dado

Esce un numero pari sapendo che è maggiore di 3

Lanciamo un dado regolare. Consideriamo gli eventi

$$A = \text{“esce un numero pari”}, \quad B = \text{“esce un numero maggiore di 3”}.$$

Vogliamo calcolare $p(A | B)$.

Prima del condizionamento l'universo è

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'evento B è

$$B = \{4, 5, 6\}.$$

Sapere che B è accaduto significa che il risultato non può più essere 1, 2 o 3. Il nuovo universo è B . Dentro B , i risultati pari sono

$$A \cap B = \{4, 6\}.$$

Quindi

$$p(A | B) = \frac{2}{3}.$$

Usando la formula:

$$p(A \cap B) = \frac{2}{6}, \quad p(B) = \frac{3}{6},$$

perciò

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

La differenza decisiva

Il valore $\frac{2}{6}$ non è $p(A | B)$. È $p(A \cap B)$, cioè la probabilità che il numero sia contemporaneamente pari e maggiore di 3. La probabilità condizionata deve invece ragionare solo sui tre casi 4, 5, 6.

Esempio 2: gettoni numerati da 1 a 12

Estraiamo un multiplo di 3 sapendo che il numero è minore di 9

Un sacchetto contiene gettoni numerati da 1 a 12. Consideriamo

$$A = \text{“esce un multiplo di 3”}, \quad B = \text{“esce un numero minore di 9”}.$$

Calcoliamo $p(A)$ e $p(A | B)$.

Senza informazioni:

$$A = \{3, 6, 9, 12\}, \quad p(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Se però sappiamo che il numero è minore di 9, allora il nuovo universo è

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Dentro questo nuovo universo, i multipli di 3 sono solo

$$A \cap B = \{3, 6\}.$$

Quindi

$$p(A | B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Con la formula:

$$p(A \cap B) = \frac{2}{12}, \quad p(B) = \frac{8}{12},$$

perciò

$$p(A | B) = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{8}{12}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Perché non si scrive 2/11?

Non stiamo facendo una seconda estrazione senza reinserimento. Non abbiamo tolto un gettone e poi estratto di nuovo. Stiamo parlando dello stesso gettone estratto, sul quale riceviamo un'informazione: "è minore di 9". Questa informazione restringe i casi possibili da 12 a 8, non da 12 a 11.

Esempio 3: carte da gioco

Estrazione di una figura sapendo che la carta è di cuori

Da un mazzo di 52 carte francesi si estrae una carta. Sia

$$A = \text{"la carta è una figura"}, \quad B = \text{"la carta è di cuori"}.$$

Calcoliamo $p(A | B)$.

Se sappiamo che la carta è di cuori, allora non dobbiamo più considerare tutte le 52 carte, ma solo le 13 carte di cuori. Tra queste 13 carte, le figure sono 3: fante, donna, re.

Quindi

$$p(A | B) = \frac{3}{13}.$$

La formula conferma il ragionamento:

$$p(A \cap B) = \frac{3}{52}, \quad p(B) = \frac{13}{52},$$

quindi

$$p(A | B) = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{3}{13}.$$

Esempio 4: sportivi in una classe

Sportivo sapendo che si trova nel gruppo A

In una classe di 24 studenti, 10 sono nel gruppo A e 14 nel gruppo B. Nel gruppo A, 6 studenti praticano sport; nel gruppo B, 7 studenti praticano sport. Si sceglie uno studente a caso. Qual è la probabilità che pratichi sport, sapendo che appartiene al gruppo A?

L'informazione "appartiene al gruppo A " restringe l'universo ai soli 10 studenti del gruppo A . Tra questi, 6 praticano sport. Dunque

$$p(\text{sport} \mid \text{gruppo } A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Osserviamo che non serve guardare il gruppo B : una volta saputo che lo studente è nel gruppo A , il gruppo B non è più parte dei casi possibili.

Il prodotto logico: moltiplicare lungo un percorso

Dalla formula della probabilità condizionata

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

ricaviamo subito

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B).$$

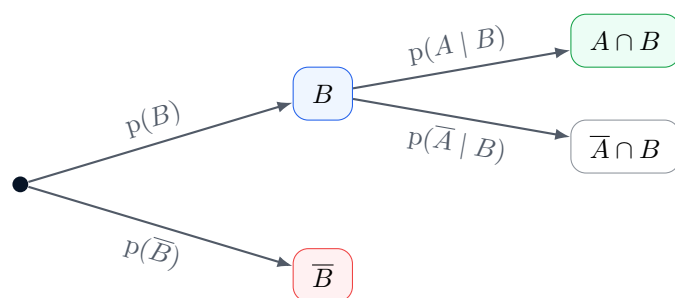
La stessa intersezione può essere scritta anche invertendo l'ordine:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A).$$

Come leggere la formula

La probabilità di $A \cap B$ è la probabilità che accadano entrambe le cose. Se immaginiamo un percorso a due passi, prima accade B , poi dentro B accade A . Per questo si moltiplica:

probabilità del primo passo $\times$ probabilità del secondo passo sapendo il primo.



Il percorso verso $A \cap B$ ha probabilità $p(B) \cdot p(A \mid B)$.

Che cos'è una partizione

Prima di parlare della formula di disintegrazione e del teorema di Bayes serve un'idea: la **partizione**. Una partizione è un modo di dividere l'universo in sottoinsiemi che non si sovrappongono e che, uniti, ricostruiscono tutto l'universo.

Partizione dello spazio campionario

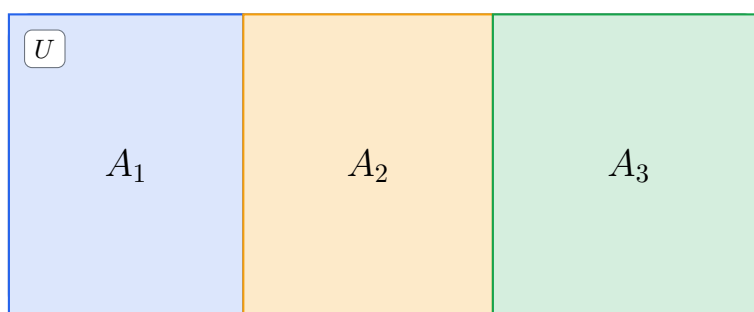
Gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ formano una partizione di U se:

- nessuno è impossibile;
- sono a due a due incompatibili, cioè non possono accadere contemporaneamente;
- la loro unione è tutto l'universo U .

Per esempio, se scelgo a caso un pezzo prodotto da tre macchine, gli eventi

A_1 = “proviene dalla macchina 1”, A_2 = “proviene dalla macchina 2”, A_3 = “proviene dalla macchina 3”

formano una partizione: ogni pezzo viene da una e una sola macchina.



I blocchi non si sovrappongono e riempiono tutto U .

La formula di disintegrazione

Quando si usa

La formula di disintegrazione si usa quando un evento B può accadere in più modi alternativi. Non sappiamo ancora se B accadrà: vogliamo calcolare la sua probabilità totale.

Domanda tipica della disintegrazione

Qual è la probabilità che accada B ?

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono le possibili “strade” attraverso cui B può accadere (cause), allora l'evento B (effetto) si spezza in:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n).$$

Questi pezzi sono incompatibili: un caso non può appartenere contemporaneamente in due blocchi diversi della partizione. Per questo possiamo sommare le probabilità.

Formula di disintegrazione o probabilità totale

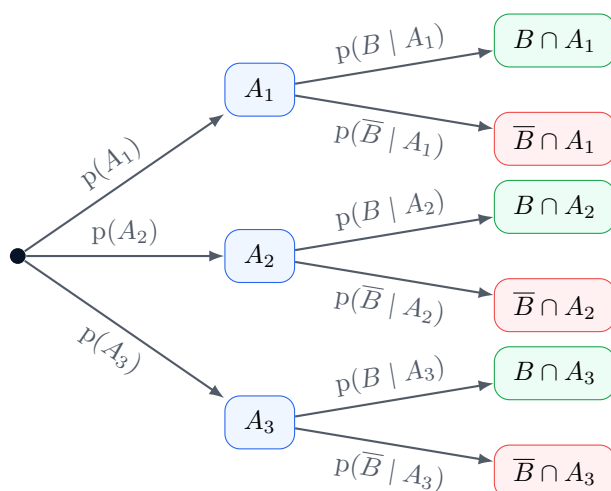
Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ formano una partizione di U , allora

$$p(B) = p(A_1)p(B | A_1) + p(A_2)p(B | A_2) + \dots + p(A_n)p(B | A_n).$$

In forma compatta:

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i)p(B | A_i).$$

Il grafo della disintegrazione



Per trovare $p(B)$:

sommo solo i percorsi che terminano in B .

$$p(B) = p(A_1)p(B | A_1) + p(A_2)p(B | A_2) + p(A_3)p(B | A_3).$$

Esempi sull'uso della formula di disintegrazione

Esempio D1: due urne prima di vedere la pallina

Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca

Consideriamo due urne. La prima contiene 6 palline bianche e 10 nere. La seconda contiene 8 palline bianche e 2 nere. Si sceglie un'urna a caso e poi si estrae una pallina. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

Definiamo gli eventi:

A_1 = "scelgo la prima urna", A_2 = "scelgo la seconda urna",

B = "estraggo una pallina bianca".

Le probabilità di scelta delle urne sono

$$p(A_1) = p(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Le probabilità di estrarre bianca, una volta scelta l'urna, sono

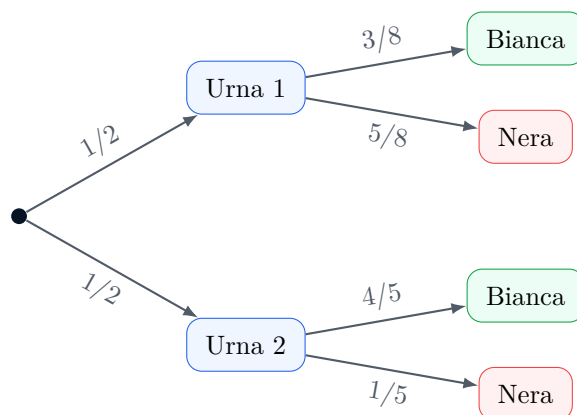
$$p(B | A_1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \quad p(B | A_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Ora sommiamo i due percorsi che portano a B :

$$p(B) = p(A_1)p(B | A_1) + p(A_2)p(B | A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}.$$

Quindi

$$p(B) = \frac{3}{16} + \frac{2}{5} = \frac{15}{80} + \frac{32}{80} = \frac{47}{80}.$$



Esempio D2: mezzi di trasporto e ritardo

Un evento può accadere tramite strade diverse

Uno studente va a scuola in autobus il 50% delle volte, in treno il 30% e in auto il 20%. La probabilità di arrivare in ritardo è rispettivamente 12%, 8% e 5%. Qual è la probabilità totale di arrivare in ritardo?

Sia R = “arrivare in ritardo”. Le cause possibili sono il mezzo scelto:

A = autobus, T = treno, C = auto.

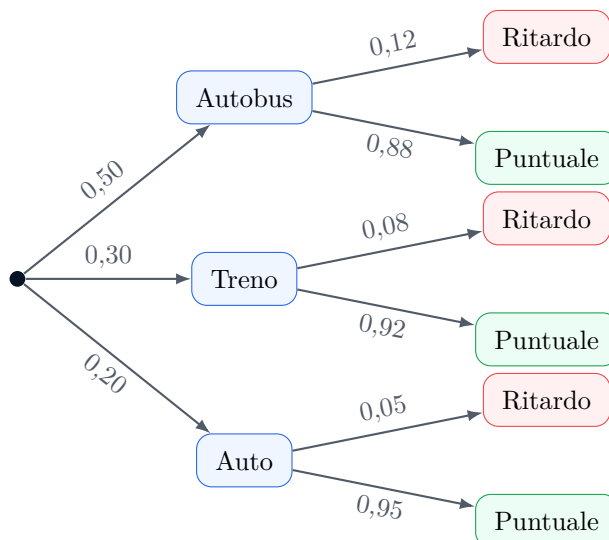
Questi tre eventi formano una partizione, perché consideriamo tre modalità alternative e complete. Applicando la disintegrazione:

$$p(R) = 0,50 \cdot 0,12 + 0,30 \cdot 0,08 + 0,20 \cdot 0,05.$$

Dunque

$$p(R) = 0,060 + 0,024 + 0,010 = 0,094.$$

La probabilità totale di arrivare in ritardo è quindi 9,4%.



Interpretazione

Non stiamo chiedendo: “se è arrivato in ritardo, quale mezzo aveva preso?”. Questa sarebbe una domanda di Bayes. Qui chiediamo semplicemente: “prima di sapere come andrà, quanto è probabile il ritardo?”. Questa è una disintegrazione.

Esempio D3: produzione di tre macchine

Pezzo difettoso

Tre macchine producono rispettivamente il 20%, il 50% e il 30% dei pezzi. Le probabilità di produrre un pezzo difettoso sono rispettivamente 5%, 8% e 6%. Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso sia difettoso?

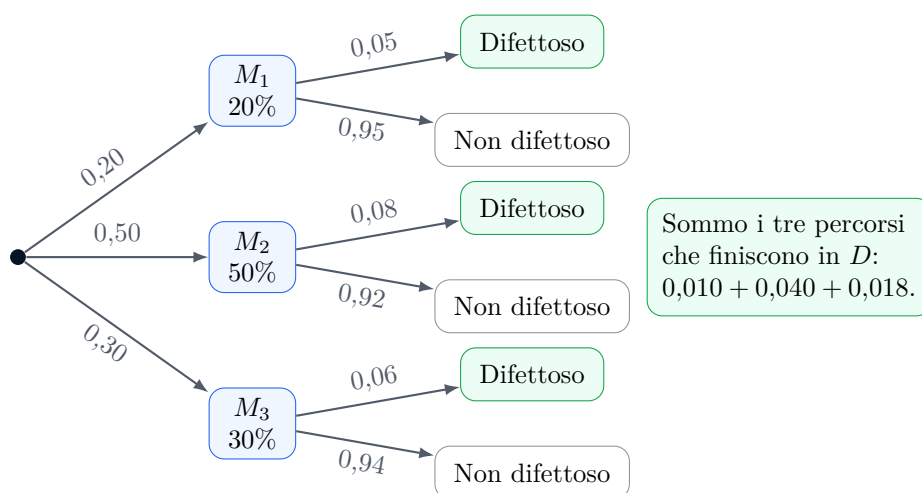
Sia D = “pezzo difettoso”. Allora

$$p(D) = 0,20 \cdot 0,05 + 0,50 \cdot 0,08 + 0,30 \cdot 0,06.$$

Quindi

$$p(D) = 0,010 + 0,040 + 0,018 = 0,068.$$

La probabilità totale di trovare un pezzo difettoso è 6,8%.



Il teorema di Bayes

Il problema inverso rispetto alla disintegrazione

La formula di disintegrazione risponde a una domanda “in avanti”: conosco le possibili cause e voglio calcolare la probabilità dell’effetto.

Il teorema di Bayes risponde invece a una domanda “all’indietro”: l’effetto si è verificato, e voglio capire quale causa è più probabile.

Domanda tipica di Bayes

Sapendo che B è accaduto, qual è la probabilità che la causa sia stata A_k ?

Esempi di domande bayesiane:

- Il pezzo è difettoso. Da quale macchina è più probabile che provenga?
- Il test è positivo. Qual è la probabilità che la persona sia davvero malata?
- La pallina estratta è nera. Da quale urna è più probabile che provenga?
- Il messaggio contiene certe parole sospette. Qual è la probabilità che sia spam?

In tutti questi casi l’evento osservato è noto. Noi cerchiamo di aggiornare le probabilità delle cause.

Enunciato del teorema di Bayes

Teorema di Bayes

Sia $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partizione dello spazio campionario U . Sia B un evento con $p(B) > 0$. Allora, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, vale

$$p(A_k | B) = \frac{p(A_k)p(B | A_k)}{p(A_1)p(B | A_1) + p(A_2)p(B | A_2) + \dots + p(A_n)p(B | A_n)}.$$

In forma compatta:

$$p(A_k | B) = \frac{p(A_k)p(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n p(A_i)p(B | A_i)}.$$

Come leggere i pezzi della formula

- $p(A_k)$ è la probabilità **a priori** della causa A_k : cioè quanto ritenevamo probabile quella causa prima di osservare B .
- $p(B | A_k)$ è la **verosimiglianza**: quanto la causa A_k è capace di produrre l’effetto B .
- Il denominatore è $p(B)$, cioè la probabilità totale dell’effetto osservato. Si calcola con la disintegrazione.
- $p(A_k | B)$ è la probabilità **a posteriori**: la probabilità aggiornata della causa dopo aver osservato l’effetto.

Perché il teorema di Bayes è vero?

Partiamo dalla probabilità del percorso che passa per A_k e poi arriva a B :

$$p(A_k \cap B) = p(A_k)p(B | A_k).$$

Però la stessa intersezione può essere letta anche al contrario:

$$p(A_k \cap B) = p(B)p(A_k | B).$$

Uguagliando:

$$p(B)p(A_k | B) = p(A_k)p(B | A_k).$$

Quindi

$$p(A_k | B) = \frac{p(A_k)p(B | A_k)}{p(B)}.$$

Infine, siccome B può accadere attraverso tutte le cause della partizione, calcoliamo $p(B)$ con la disintegrazione:

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i)p(B | A_i).$$

Sostituendo, otteniamo il teorema di Bayes.

Il teorema di Bayes non dice che $p(A | B) = p(B | A)$

Queste due probabilità possono essere molto diverse. Ad esempio: la probabilità di avere febbre sapendo di avere l'influenza è alta; la probabilità di avere l'influenza sapendo di avere febbre può essere molto più bassa, perché la febbre può avere molte cause.

Il caso di due sole cause

Quando le cause possibili sono solo A e $\bar{A}$, la formula diventa

$$p(A | B) = \frac{p(A)p(B | A)}{p(A)p(B | A) + p(\bar{A})p(B | \bar{A})}.$$

Questa forma è molto utile nei problemi con test diagnostici, controlli di qualità e classificazioni “sì/no”.

Disintegrazione e teorema di Bayes: differenze

Formula di disintegrazione	Teorema di Bayes
Si usa quando l'evento B deve ancora accadere o vogliamo calcolarne la probabilità totale.	Si usa quando l'evento B è già accaduto o è stato osservato.
Domanda: “Quanto è probabile B ?”	Domanda: “Sapendo che B è accaduto, quale causa è più probabile?”
Va dalle cause all'effetto.	Va dall'effetto alle cause.
Somma i percorsi che portano a B .	Prende un percorso che porta a B e lo confronta con tutti i percorsi che portano a B .
Formula: $p(B) = \sum_i p(A_i)p(B A_i)$.	Formula: $p(A_k B) = \frac{p(A_k)p(B A_k)}{\sum_i p(A_i)p(B A_i)}$.

Frase da ricordare

Disintegrazione: dalle cause all'effetto. Bayes: dall'effetto alle cause.

Esempi sul teorema di Bayes

Esempio B1: due macchine, pezzo difettoso

Produzione in parti uguali

Una produzione viene affidata in parti uguali a due macchine A e B . La macchina A produce pezzi difettosi con probabilità 2%, la macchina B con probabilità 5%. Si sceglie un pezzo a caso e lo si trova difettoso. Qual è la probabilità che sia stato prodotto dalla macchina B ?

Definiamo

D = “il pezzo è difettoso”.

Le probabilità a priori sono

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}.$$

Le probabilità di difetto sono

$$p(D | A) = \frac{2}{100}, \quad p(D | B) = \frac{5}{100}.$$

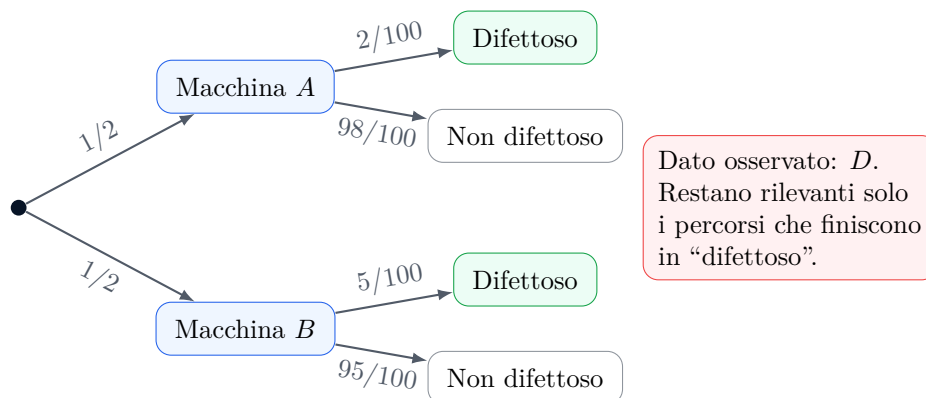
Vogliamo $p(B | D)$, cioè la probabilità che il pezzo venga da B , sapendo che è difettoso.

$$p(B | D) = \frac{p(B)p(D | B)}{p(A)p(D | A) + p(B)p(D | B)}.$$

Sostituiamo:

$$p(B | D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{5}{7} \approx 0,714.$$

Quindi, sapendo che il pezzo è difettoso, la probabilità che provenga dalla macchina B è circa 71,4%.



Esempio B2: tre macchine, pezzo difettoso

Riprendiamo l'esempio D3.

Pezzo difettoso

Tre macchine producono rispettivamente il 20%, il 50% e il 30% dei pezzi. Le probabilità di produrre un pezzo difettoso sono rispettivamente 5%, 8% e 6%. Qual è la probabilità che un pezzo scelto a caso sia difettoso?

Avevamo già calcolato con la disintegrazione

$$p(D) = 0,068.$$

Ora cambiamo domanda.

Dall'effetto alla causa

Sapendo che il pezzo è difettoso, qual è la probabilità che provenga dalla prima macchina? E qual è la probabilità che provenga dalla seconda o dalla terza?

Per la prima macchina:

$$p(M_1 | D) = \frac{p(M_1)p(D | M_1)}{p(D)} = \frac{0,20 \cdot 0,05}{0,068} = \frac{0,010}{0,068} = \frac{5}{34}.$$

Per la seconda o la terza macchina possiamo sommare i percorsi corrispondenti:

$$p(M_2 \cup M_3 | D) = \frac{0,50 \cdot 0,08 + 0,30 \cdot 0,06}{0,068} = \frac{0,058}{0,068} = \frac{29}{34}.$$

Osservazione

Il denominatore è sempre $p(D)$, cioè la probabilità totale di osservare un pezzo difettoso. Il numeratore seleziona invece solo il percorso, o i percorsi, della causa richiesta.

Esempio B3: tre urne e pallina nera

Urna nascosta

Un'urna contiene 20 palline rosse, 30 bianche e 40 nere. Una seconda urna contiene 10 rosse, 15 bianche e 35 nere. Una terza urna contiene 18 rosse, 12 bianche e 20 nere. Si sceglie a caso una delle tre urne e si estrae una pallina. Sapendo che la pallina è nera, qual è la probabilità che provenga dalla prima urna?

Le cause sono:

$$A_1 = \text{"prima urna"}, \quad A_2 = \text{"seconda urna"}, \quad A_3 = \text{"terza urna"}.$$

L'evento osservato è

$$N = \text{"pallina nera"}.$$

Poiché l'urna è scelta a caso:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Le probabilità di ottenere nera dalle tre urne sono

$$p(N | A_1) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}, \quad p(N | A_2) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}, \quad p(N | A_3) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

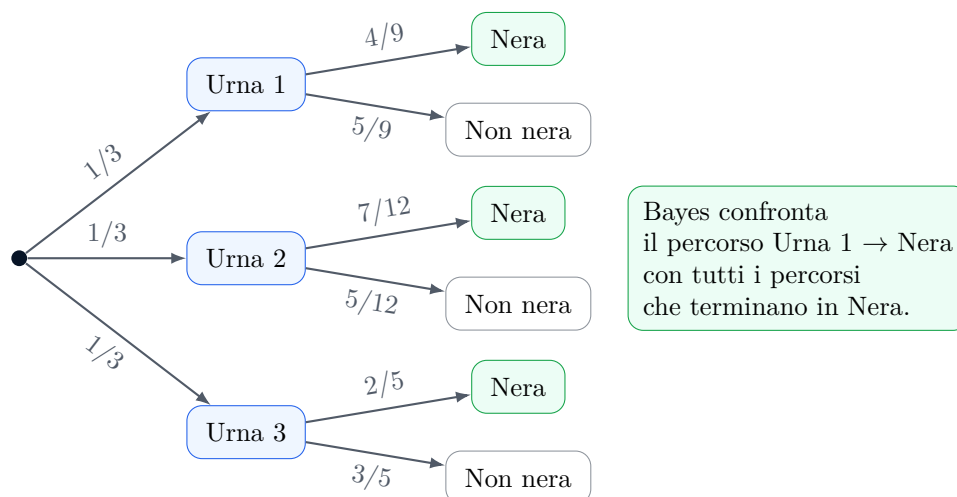
Per il teorema di Bayes:

$$p(A_1 | N) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}.$$

Il fattore $\frac{1}{3}$ è presente in tutti i termini e si può semplificare:

$$p(A_1 | N) = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9} + \frac{7}{12} + \frac{2}{5}} = \frac{80}{257} \approx 0,311.$$

Quindi la probabilità è circa 31,1%.



Esempio B4: test medico e falsi positivi

Perché un test positivo non basta sempre

Una malattia riguarda l'1% della popolazione. Un test risulta positivo nel 95% dei malati, ma risulta positivo anche nel 3% dei sani. Una persona scelta a caso risulta positiva. Qual è la probabilità che sia davvero malata?

Definiamo

M = “persona malata”, S = “persona sana”, $+$ = “test positivo”.

Abbiamo

$$\begin{aligned} p(M) &= 0,01, & p(S) &= 0,99, \\ p(+ | M) &= 0,95, & p(+ | S) &= 0,03. \end{aligned}$$

Vogliamo

$$p(M | +).$$

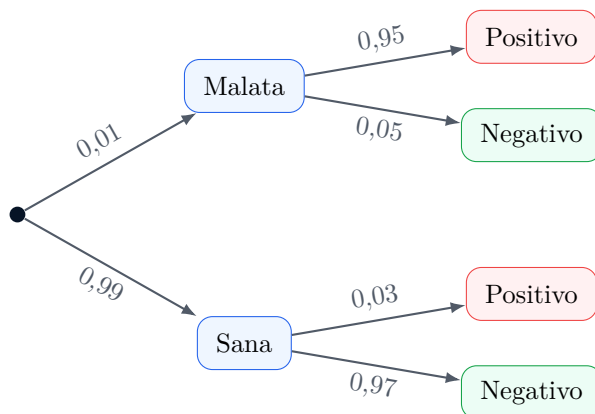
Per il teorema di Bayes:

$$p(M | +) = \frac{p(M)p(+ | M)}{p(M)p(+ | M) + p(S)p(+ | S)}.$$

Sostituendo:

$$p(M | +) = \frac{0,01 \cdot 0,95}{0,01 \cdot 0,95 + 0,99 \cdot 0,03} = \frac{0,0095}{0,0392} \approx 0,242.$$

Quindi la probabilità è circa 24,2%.



Dal grafo si vede che un test positivo può arrivare da due strade diverse:

$$M \cap + \quad \text{oppure} \quad S \cap +.$$

Perciò

$$p(+) = p(M)p(+ | M) + p(S)p(+ | S) = 0,01 \cdot 0,95 + 0,99 \cdot 0,03 = 0,0392.$$

Allora, per Bayes,

$$p(M | +) = \frac{p(M)p(+ | M)}{p(+)} = \frac{0,01 \cdot 0,95}{0,0392} \approx 0,242.$$

Quindi la probabilità che una persona risultata positiva sia davvero malata è circa il 24,2%.

Perché non é 95%?

Il 95% è $p(+ | M)$: significa che il test funziona bene sui malati. Ma la domanda è diversa: vogliamo $p(M | +)$, cioè la probabilità di essere malati sapendo che il test è positivo. Se la malattia è rara, tra i positivi possono esserci molti falsi positivi.

Lo stesso esempio con le frequenze

Per rendere l'idea ancora più concreta, immaginiamo una popolazione di 10 000 persone.

Gruppo	Numero persone	Positivi al test	Interpretazione
Malati	100	95	veri positivi
Sani	9900	297	falsi positivi
Totale positivi		392	95 veri positivi e 297 falsi positivi

Tra i 392 positivi, i malati sono 95. Quindi

$$p(M | +) = \frac{95}{392} \approx 0,242.$$

La frequenza mostra bene il significato di Bayes: non guardiamo tutti i malati, ma guardiamo tutti i positivi e chiediamo quanti, tra questi, sono davvero malati.

Esempio B5: spam e parola sospetta

Un messaggio contiene la parola “premio”

In una casella di posta, il 20% dei messaggi è spam. La parola “premio” compare nel 60% dei messaggi spam e nel 5% dei messaggi non spam. Un messaggio contiene la parola “premio”. Qual è la probabilità che sia spam?

Sia

S = “messaggio spam”, N = “messaggio non spam”, P = “contiene la parola premio”.

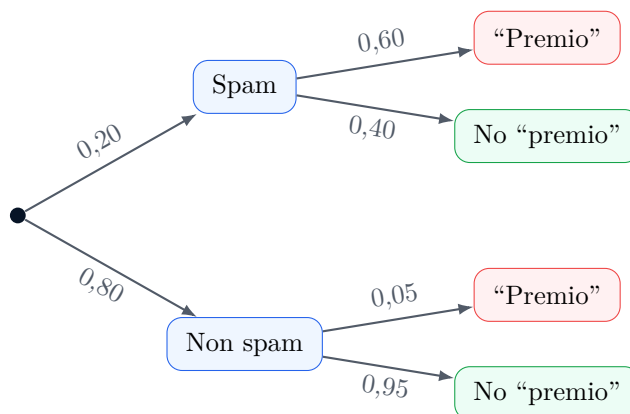
Abbiamo

$$p(S) = 0,20, \quad p(N) = 0,80, \quad p(P | S) = 0,60, \quad p(P | N) = 0,05.$$

Allora

$$p(S | P) = \frac{0,20 \cdot 0,60}{0,20 \cdot 0,60 + 0,80 \cdot 0,05} = \frac{0,12}{0,16} = 0,75.$$

La probabilità che il messaggio sia spam è 75%.



Dal grafo si vede che un messaggio contenente la parola “premio” può arrivare da due strade diverse:

$$S \cap P \quad \text{oppure} \quad N \cap P.$$

Perciò

$$p(P) = p(S)p(P | S) + p(N)p(P | N) = 0,20 \cdot 0,60 + 0,80 \cdot 0,05 = 0,16.$$

Allora, per il teorema di Bayes,

$$p(S | P) = \frac{p(S)p(P | S)}{p(P)} = \frac{0,20 \cdot 0,60}{0,16} = \frac{0,12}{0,16} = 0,75.$$

Quindi la probabilità che il messaggio sia spam è 75%.

Interpretazione

La parola “premio” non dimostra con certezza che il messaggio sia spam. Però aumenta molto la probabilità di spam, perché è molto più frequente nei messaggi spam che in quelli non spam.

Ulteriori esempi aggiuntivi

Esempio 1: due urne e una pallina bianca

Problema

Abbiamo due urne.

- Urna U_1 : 3 palline bianche e 2 nere.
- Urna U_2 : 4 palline bianche e 6 nere.

Si sceglie l'urna lanciando un dado: se esce 1 o 2 si sceglie U_1 , altrimenti si sceglie U_2 . Poi si estrae una pallina.

a) Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

b) Sapendo che la pallina estratta è bianca, qual è la probabilità che provenga da U_1 ?

Passo 1: cause ed effetto

Le cause sono

$$A_1 = \text{"viene scelta l'urna } U_1\text{"}, \quad A_2 = \text{"viene scelta l'urna } U_2\text{"}.$$

L'effetto è

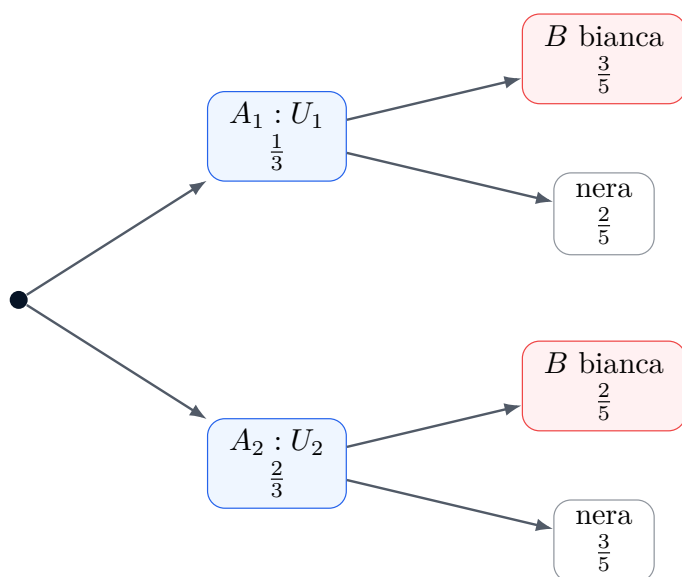
$$B = \text{"la pallina estratta è bianca"}.$$

Poiché U_1 si sceglie con 2 risultati del dado su 6,

$$p(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p(A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Inoltre

$$p(B | A_1) = \frac{3}{5}, \quad p(B | A_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$



Percorsi che portano a bianca

$$U_1 \rightarrow B: \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$U_2 \rightarrow B: \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

a) Probabilità di estrarre bianca: disintegrazione

Qui la pallina non è ancora stata osservata. Vogliamo sapere quanto è probabile l'effetto B considerando tutte le urne possibili:

$$p(B) = p(A_1)p(B | A_1) + p(A_2)p(B | A_2).$$

Quindi

$$p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}.$$

b) Sapendo che è bianca: Bayes

Adesso l'effetto B è già accaduto. Non stiamo più cercando la probabilità di bianca: sappiamo che è bianca. Vogliamo capire da quale urna sia probabilmente arrivata.

$$p(A_1 | B) = \frac{p(A_1)p(B | A_1)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{3}{7}.$$

Lettura concettuale

Il numero $\frac{3}{5}$ è la probabilità di estrarre bianca *se so già* di essere nell'urna U_1 . La domanda finale è diversa: se ho già visto una pallina bianca, quanto è plausibile che l'urna fosse U_1 ? Per questo la risposta non è $\frac{3}{5}$, ma $\frac{3}{7}$.

Esempio 2: due macchine e un pezzo difettoso

Problema

Una produzione è affidata in parti uguali a due macchine A e B .

- La macchina A produce pezzi difettosi con probabilità 2%.
- La macchina B produce pezzi difettosi con probabilità 5%.

Si sceglie un pezzo a caso e lo si trova difettoso. Qual è la probabilità che sia stato prodotto dalla macchina B ?

Lettura lenta del testo

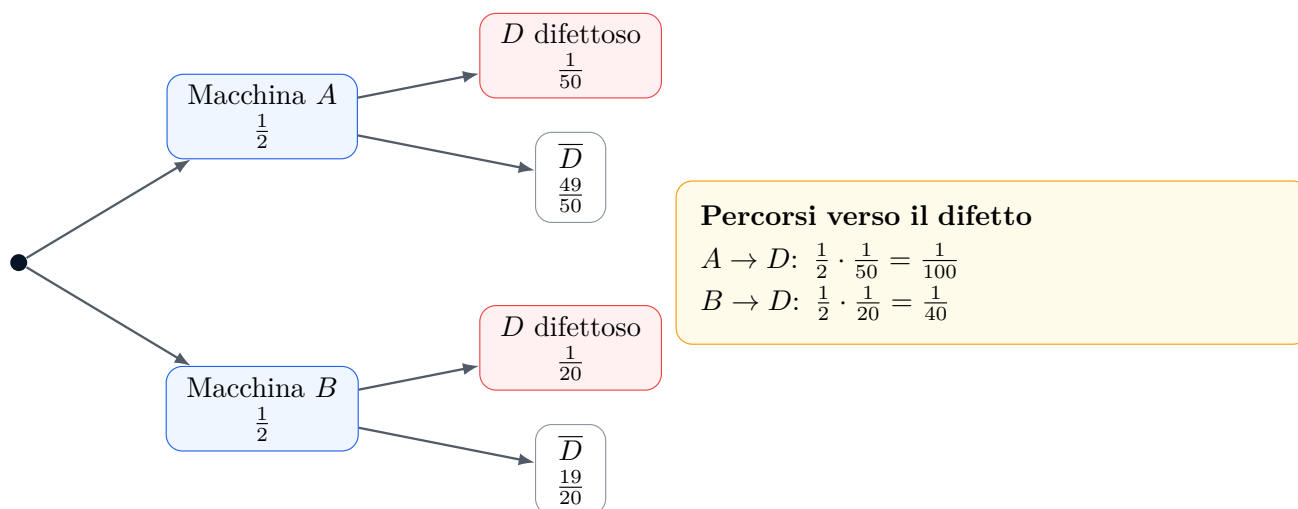
La frase “*lo si trova difettoso*” significa che l'effetto D è già stato osservato. Quindi non dobbiamo fermarci alla probabilità di difetto; dobbiamo risalire alla causa.

A = “pezzo prodotto dalla macchina A ”, B = “pezzo prodotto dalla macchina B ”,

D = “pezzo difettoso”.

Poiché la produzione è in parti uguali,

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}, \quad p(D | A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}, \quad p(D | B) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$



Prima: probabilità totale di difetto

Anche se la domanda finale è Bayes, abbiamo bisogno del denominatore, cioè della probabilità totale di osservare un difetto:

$$p(D) = p(A)p(D | A) + p(B)p(D | B).$$

$$p(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{100} + \frac{1}{40} = \frac{2}{200} + \frac{5}{200} = \frac{7}{200}.$$

Poi: probabilità che il difetto venga da B

$$p(B | D) = \frac{p(B)p(D | B)}{p(D)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20}}{\frac{7}{200}} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{7}{200}} = \frac{5}{7} \approx 71,4\%.$$

Perché il risultato è alto?

Le due macchine producono la stessa quantità, ma la macchina B produce difetti più spesso. Se abbiamo davanti un pezzo difettoso, è ragionevole che sia più probabile che venga proprio dalla macchina B . Bayes misura questa intuizione.

Esempio 3: test medico e falso positivo

Problema

Una malattia colpisce l'1% della popolazione. Un test:

- risulta positivo nel 99% dei malati;
- risulta positivo nel 5% dei sani.

Una persona fa il test e risulta positiva. Qual è la probabilità che sia davvero malata?

Dati

Le cause sono

$$M = \text{"persona malata"}, \quad S = \text{"persona sana"}.$$

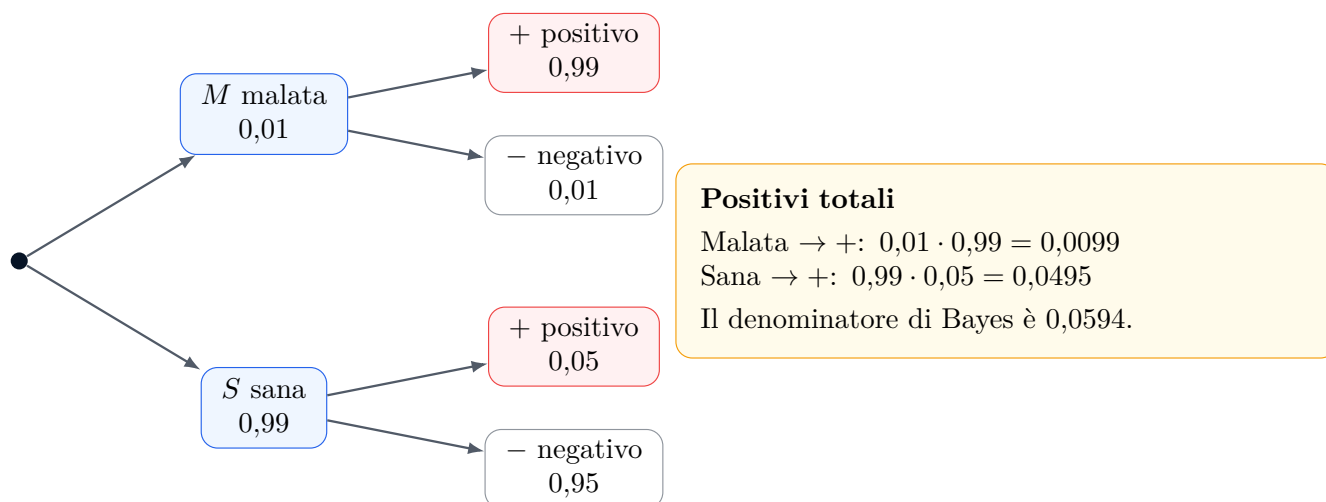
L'effetto osservato è

$$+ = \text{"test positivo"}.$$

I dati sono

$$p(M) = 0,01, \quad p(S) = 0,99,$$

$$p(+ | M) = 0,99, \quad p(+ | S) = 0,05.$$



Calcolo con Bayes

$$p(M | +) = \frac{p(M)p(+ | M)}{p(M)p(+ | M) + p(S)p(+ | S)}.$$

$$p(M | +) = \frac{0,01 \cdot 0,99}{0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,05} = \frac{0,0099}{0,0594} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%.$$

Perché non è 99%?

Il 99% è $p(+ | M)$: se una persona è malata, il test quasi certamente risulta positivo. La domanda però è $p(M | +)$: se vedo un test positivo, quanto è probabile che la persona sia malata? Le due probabilità hanno i simboli invertiti e raccontano due storie diverse.

Metodo delle frequenze: immagina 10000 persone

Su 10000 persone:

- malati: 100; positivi tra i malati: $0,99 \cdot 100 = 99$;
- sani: 9900; positivi tra i sani: $0,05 \cdot 9900 = 495$.

I positivi totali sono $99 + 495 = 594$. Tra questi, i malati sono 99:

$$p(M | +) = \frac{99}{594} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%.$$

Esempio 4: tre fornitori

Problema

Un'azienda acquista componenti da tre fornitori:

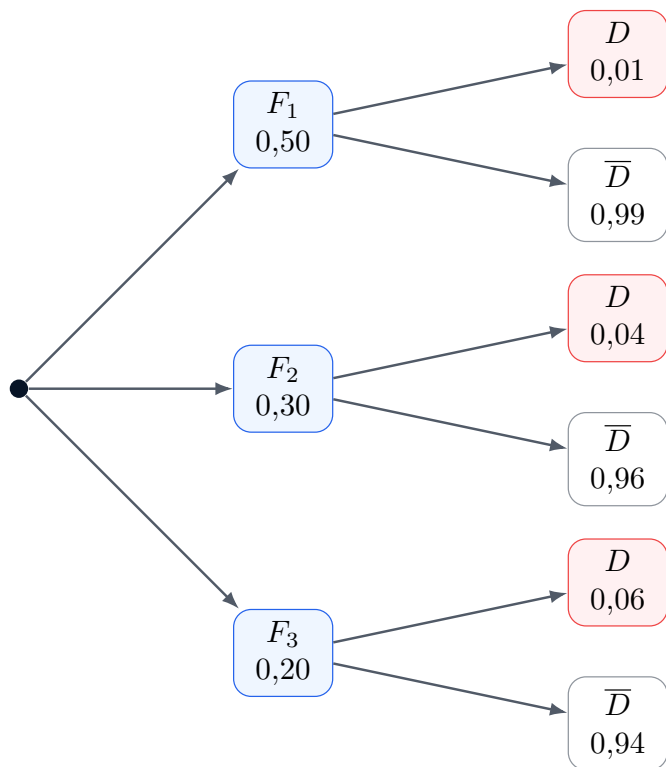
- il fornitore F_1 fornisce il 50% dei pezzi e ha difettosità 1%;
- il fornitore F_2 fornisce il 30% dei pezzi e ha difettosità 4%;
- il fornitore F_3 fornisce il 20% dei pezzi e ha difettosità 6%.

Scelto un pezzo a caso, lo si trova difettoso. Qual è la probabilità che provenga dal fornitore F_3 ?

Dati

$$p(F_1) = 0,50, \quad p(F_2) = 0,30, \quad p(F_3) = 0,20.$$

$$p(D | F_1) = 0,01, \quad p(D | F_2) = 0,04, \quad p(D | F_3) = 0,06.$$


Percorsi verso D

$$F_1 \rightarrow D: 0,50 \cdot 0,01 = 0,005$$

$$F_2 \rightarrow D: 0,30 \cdot 0,04 = 0,012$$

$$F_3 \rightarrow D: 0,20 \cdot 0,06 = 0,012$$

Il ramo $F_3 \rightarrow D$ non basta da solo: va confrontato con tutti i rami che finiscono in D .

Disintegrazione: probabilità di difetto

$$p(D) = 0,50 \cdot 0,01 + 0,30 \cdot 0,04 + 0,20 \cdot 0,06 = 0,005 + 0,012 + 0,012 = 0,029.$$

Bayes: provenienza da F_3

$$p(F_3 | D) = \frac{p(F_3)p(D | F_3)}{p(D)} = \frac{0,20 \cdot 0,06}{0,029} = \frac{0,012}{0,029} \approx 0,414.$$

Quindi la probabilità è circa 41,4%.

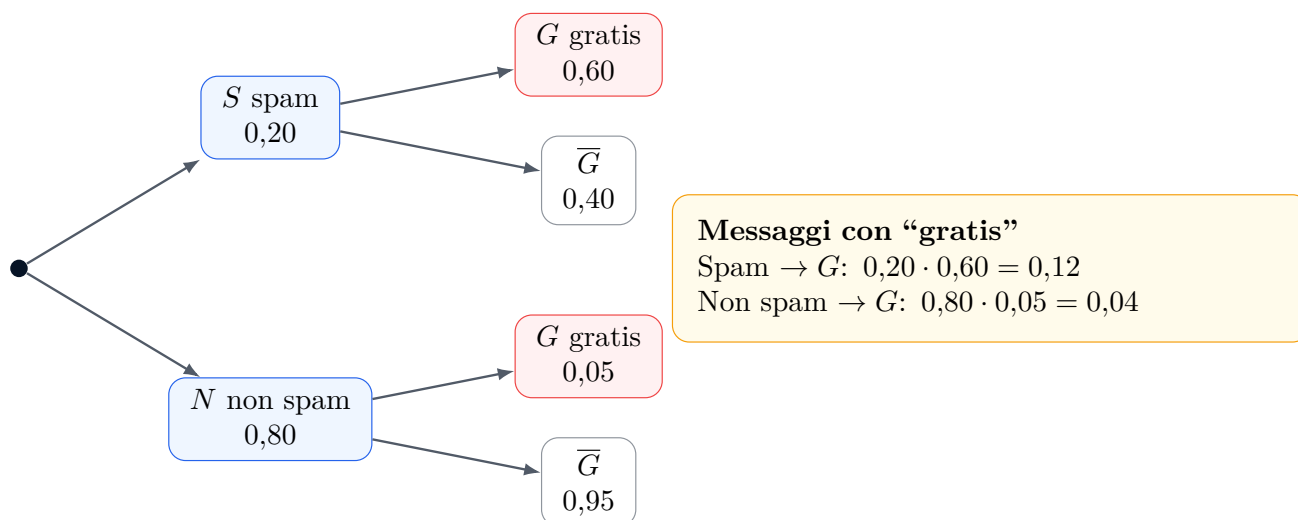
Esempio 5: spam e parola sospetta
Problema

Il 20% dei messaggi ricevuti da una casella di posta è spam. Il 60% dei messaggi spam contiene la parola “gratis”, mentre solo il 5% dei messaggi non spam contiene quella parola. Ricevi un messaggio che contiene “gratis”. Qual è la probabilità che sia spam?

Dati

S = “messaggio spam”, N = “messaggio non spam”, G = “contiene gratis”.

$$p(S) = 0,20, \quad p(N) = 0,80, \quad p(G | S) = 0,60, \quad p(G | N) = 0,05.$$



Calcolo

$$p(S | G) = \frac{p(S)p(G | S)}{p(S)p(G | S) + p(N)p(G | N)}$$

$$p(S | G) = \frac{0,20 \cdot 0,60}{0,20 \cdot 0,60 + 0,80 \cdot 0,05} = \frac{0,12}{0,16} = 0,75.$$

Risposta

La probabilità che il messaggio sia spam, sapendo che contiene “gratis”, è

75%.

Esempio 6: urna nascosta

Problema

Ci sono tre urne indistinguibili:

- U_1 : 8 palline rosse e 2 blu;
- U_2 : 5 rosse e 5 blu;
- U_3 : 2 rosse e 8 blu.

Si sceglie un'urna a caso e si estrae una pallina. La pallina è rossa. Qual è la probabilità che l'urna scelta sia U_1 ?

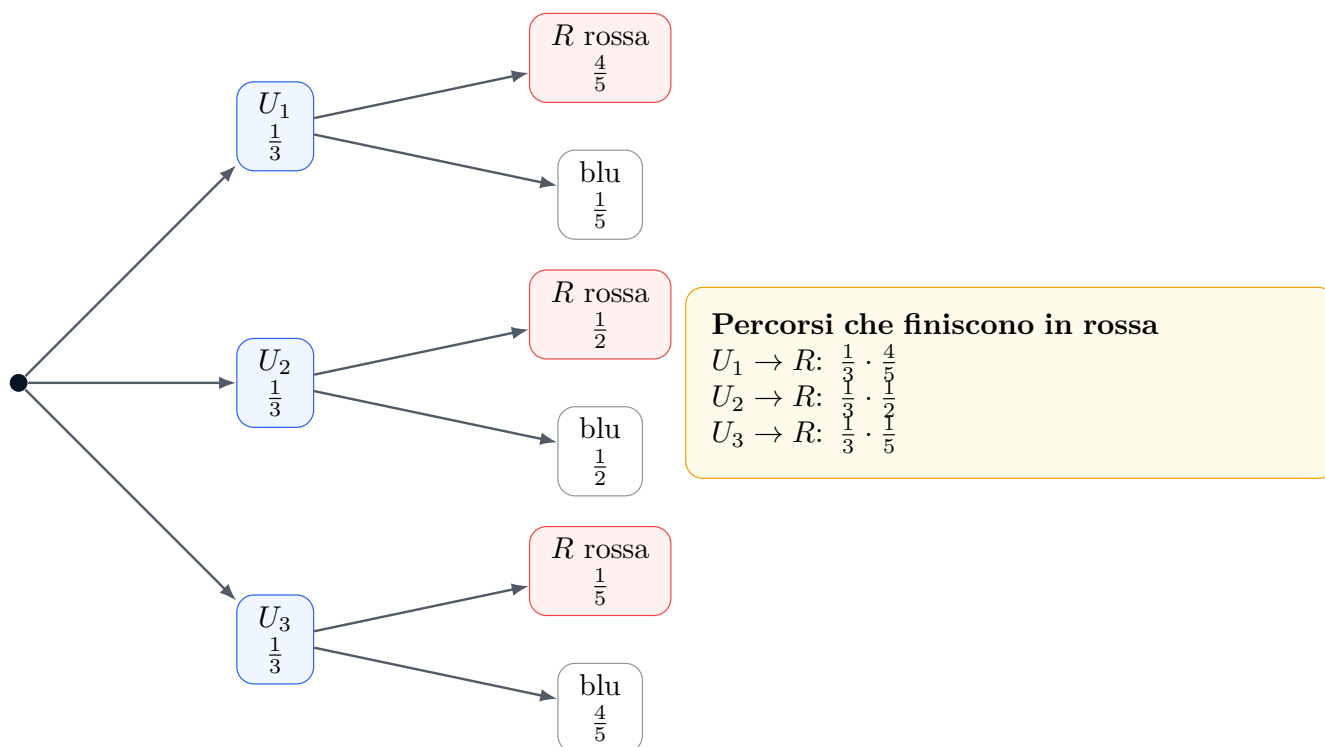
Dati

La scelta dell'urna è casuale, quindi

$$p(U_1) = p(U_2) = p(U_3) = \frac{1}{3}.$$

Se R indica l'evento “esce rossa”, allora

$$p(R | U_1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad p(R | U_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad p(R | U_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$



Calcolo

$$p(U_1 | R) = \frac{p(U_1)p(R | U_1)}{p(U_1)p(R | U_1) + p(U_2)p(R | U_2) + p(U_3)p(R | U_3)}.$$

$$p(U_1 | R) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}.$$

Poiché il fattore $\frac{1}{3}$ compare in tutti i termini, si semplifica:

$$p(U_1 | R) = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{10} + \frac{5}{10} + \frac{2}{10}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{15}{10}} = \frac{8}{15}.$$

Controllo di buon senso

La pallina rossa rende più credibile l'urna U_1 , perché U_1 è quella con più rosse. Tuttavia non possiamo dire che la probabilità sia $\frac{4}{5}$: quel valore è $p(R | U_1)$, non $p(U_1 | R)$.

Metodo alternativo: trasformare le percentuali in frequenze

Perché funziona

Alcuni problemi di Bayes diventano più chiari se immaginiamo un numero grande di casi, per esempio 1000 o 10000. Le percentuali diventano conteggi. A quel punto Bayes diventa una domanda molto concreta:

tra quelli che hanno l'effetto osservato, quanti vengono dalla causa che mi interessa?

Esempio con 10000 pezzi

Una fabbrica A produce il 70% dei pezzi e ha difettosità 3%; una fabbrica B produce il 30% e ha difettosità 8%. Immaginiamo 10000 pezzi.

	Pezzi totali	Difettosi	Non difettosi
Fabbrica A	7000	$0,03 \cdot 7000 = 210$	6790
Fabbrica B	3000	$0,08 \cdot 3000 = 240$	2760
Totale	10000	450	9550

Lettura della tabella

Se il pezzo è difettoso, non guardo più tutti i 10000 pezzi. Guardo solo i 450 difettosi. Di questi, 240 vengono da B :

$$p(B | D) = \frac{240}{450} = \frac{8}{15} \approx 53,3\%.$$

Come riconoscere il tipo di esercizio

Parole spia

Testo del problema	Formula più probabile
“Qual è la probabilità che il pezzo sia difettoso?”	Disintegrazione: devo calcolare l'effetto complessivo.
“Sapendo che il pezzo è difettoso, qual è la probabilità che provenga da ...?”	Bayes: effetto già osservato, cerco la causa.
“Qual è la probabilità che esca bianca?”	Disintegrazione, se prima si sceglie l'urna e poi si estrae.
“Dato che è uscita bianca, qual è la probabilità che fosse l'urna 1?”	Bayes.
“Il test è positivo. Qual è la probabilità che la persona sia malata?”	Bayes.

Domanda salvagente

Quando non sai quale formula usare, chiediti:

L'evento finale deve ancora accadere o è già accaduto?

- Se deve ancora accadere, di solito serve la **disintegrazione**.
- Se è già accaduto e vuoi ricostruire la causa, serve **Bayes**.

Metodo operativo per risolvere gli esercizi

Schema in 6 passi

1. **Individua l'evento osservato:** è quello che nel testo viene dato come già accaduto. Spesso è introdotto da parole come “sapendo che”, “dato che”, “avendo osservato”, “risulta che”.
2. **Individua le cause:** sono gli eventi alternativi che possono aver prodotto l'evento osservato.
3. **Controlla che le cause formino una partizione:** devono essere alternative e coprire tutti i casi possibili.
4. **Disegna l'albero:** prima i rami delle cause, poi da ciascuna causa i rami dell'effetto osservato e del suo contrario.
5. **Calcola la probabilità dell'evento osservato:** somma tutti i percorsi che terminano nell'evento osservato. Questa è la disintegrazione.
6. **Applica Bayes:** metti al numeratore il percorso della causa richiesta e al denominatore la somma di tutti i percorsi che portano all'evento osservato.

Domanda da farsi sempre

Sto calcolando la probabilità dell'effetto prima di osservarlo, oppure sto risalendo alla causa dopo aver osservato l'effetto?

Errori tipici da evitare

1. Confondere $p(A | B)$ con $p(B | A)$

La barretta verticale non è simmetrica. $p(A | B)$ significa che B è già noto e voglio A . $p(B | A)$ significa che A è già noto e voglio B .

2. Dimenticare il denominatore di Bayes

Il denominatore non è scelto a caso: è la probabilità totale dell'evento osservato. Bisogna sommare tutti i modi in cui quell'evento può verificarsi.

3. Usare il teorema di Bayes quando basta la disintegrazione

Se il testo chiede la probabilità che un evento accada, senza dire che è già stato osservato, probabilmente serve la disintegrazione. Bayes serve quando l'evento è già accaduto e si chiede la causa.

4. Non disegnare l'albero

Negli esercizi con più cause, l'albero evita quasi tutti gli errori. Ogni percorso si legge moltiplicando; percorsi alternativi si sommano.

Esercizi guidati

Esercizio 1 - Disintegrazione

Un laboratorio riceve campioni da tre sedi: il 40% dalla sede A , il 35% dalla sede B e il 25% dalla sede C . Le probabilità che un campione presenti un'anomalia sono rispettivamente 3%, 4% e 8%. Calcola la probabilità che un campione scelto a caso presenti un'anomalia.

Soluzione. Sia X = "campione con anomalia". Appliciamo la disintegrazione:

$$p(X) = 0,40 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,08.$$

$$p(X) = 0,012 + 0,014 + 0,020 = 0,046.$$

La probabilità è 4,6%.

Esercizio 2 - Bayes

Nell'esercizio precedente, si osserva un campione con anomalia. Qual è la probabilità che provenga dalla sede C ?

Soluzione. Ora l'anomalia è stata osservata: serve il teorema di Bayes.

$$p(C | X) = \frac{p(C)p(X | C)}{p(X)} = \frac{0,25 \cdot 0,08}{0,046} = \frac{0,020}{0,046} = \frac{10}{23} \approx 0,435.$$

La probabilità è circa 43,5%.

Esercizio 3 - Condizionata semplice

In una classe di 28 studenti, 16 studiano fisica con continuità. Tra questi 16, 12 hanno avuto una valutazione positiva nell'ultima verifica. Scegliendo uno studente a caso, qual è la probabilità che abbia avuto una valutazione positiva, sapendo che studia fisica con continuità?

Soluzione. L'informazione nota è "studia fisica con continuità". Il nuovo universo contiene 16 studenti. Tra questi, 12 hanno avuto valutazione positiva. Quindi

$$p(\text{valutazione positiva} | \text{studia con continuità}) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 4 - Bayes con due cause

Il 30% dei pezzi proviene da un fornitore A e il 70% da un fornitore B . Il fornitore A ha difettosità 4%, il fornitore B ha difettosità 2%. Si trova un pezzo difettoso. Qual è la probabilità che provenga dal fornitore A ?

Soluzione.

$$p(A | D) = \frac{0,30 \cdot 0,04}{0,30 \cdot 0,04 + 0,70 \cdot 0,02} = \frac{0,012}{0,026} = \frac{6}{13} \approx 0,462.$$

Ulteriori esercizi guidati

Esercizio 1

Due fabbriche producono lo stesso tipo di componente. La fabbrica A produce il 70% dei componenti e ha difettosità 3%; la fabbrica B produce il 30% e ha difettosità 8%. Un componente scelto a caso è difettoso. Qual è la probabilità che provenga da B ?

Soluzione

$$p(A) = 0,70, \quad p(B) = 0,30, \quad p(D | A) = 0,03, \quad p(D | B) = 0,08.$$

Prima calcoliamo la probabilità totale di difetto:

$$p(D) = 0,70 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,08 = 0,021 + 0,024 = 0,045.$$

Poi applichiamo Bayes:

$$p(B | D) = \frac{0,30 \cdot 0,08}{0,045} = \frac{0,024}{0,045} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \approx 53,3\%.$$

Esercizio 2

Una scatola viene scelta a caso tra due scatole. La prima contiene 6 palline verdi e 4 rosse; la seconda contiene 2 verdi e 8 rosse. Si estrae una pallina e risulta verde. Qual è la probabilità che provenga dalla prima scatola?

Soluzione

$$p(S_1) = p(S_2) = \frac{1}{2}, \quad p(V | S_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad p(V | S_2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

$$p(S_1 | V) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3

Una popolazione è composta per il 60% da adulti e per il 40% da minorenni. Il 35% degli adulti usa abitualmente la bicicletta, mentre il 20% dei minorenni la usa abitualmente. Scelta una persona a caso, qual è la probabilità che usi abitualmente la bicicletta? Se una persona usa abitualmente la bicicletta, qual è la probabilità che sia adulta?

Soluzione

Sia

$$A = \text{“adulto”}, \quad M = \text{“minorenne”}, \quad B = \text{“usa la bicicletta”}.$$

Disintegrazione:

$$p(B) = 0,60 \cdot 0,35 + 0,40 \cdot 0,20 = 0,21 + 0,08 = 0,29.$$

Bayes:

$$p(A | B) = \frac{0,60 \cdot 0,35}{0,29} = \frac{0,21}{0,29} \approx 72,4\%.$$

Esercizi aggiuntivi

1. Un'azienda ha due macchine. La prima produce il 60% dei pezzi e ha difettosità 2%; la seconda produce il 40% dei pezzi e ha difettosità 6%. Calcola la probabilità che un pezzo scelto a caso sia difettoso. **Risposta:** 3,6%.
2. Con i dati dell'esercizio precedente, sapendo che il pezzo è difettoso, calcola la probabilità che provenga dalla seconda macchina. **Risposta:** $\frac{2}{3}$.
3. Tre urne vengono scelte con la stessa probabilità. La prima contiene 7 bianche e 3 nere, la seconda 4 bianche e 6 nere, la terza 1 bianca e 9 nere. Si estrae una pallina ed è bianca. Calcola la probabilità che provenga dalla prima urna. **Risposta:** $\frac{7}{12}$.
4. Una malattia riguarda il 2% della popolazione. Un test risulta positivo nel 95% dei malati e nel 4% dei sani. Una persona è positiva al test. Calcola la probabilità che sia malata. **Risposta:** circa 32,7%.
5. Il 30% delle email è spam. Il 70% delle email spam contiene un link sospetto, mentre il 10% delle email non spam contiene un link sospetto. Calcola la probabilità che un'email con link sospetto sia spam. **Risposta:** 75%.
6. Un negozio riceve il 45% dei prodotti dal fornitore F_1 , il 35% da F_2 e il 20% da F_3 . Le percentuali di difettosità sono rispettivamente 1%, 3%, 5%. Un prodotto è difettoso. Calcola la probabilità che provenga da F_3 . **Risposta:** 40%.

Esercizi proposti

1. Un sacchetto contiene numeri da 1 a 20. Si estrae un numero e si sa che è maggiore di 10. Qual è la probabilità che sia multiplo di 3? **R.** $\frac{3}{10}$
2. Nel lancio di un dado è uscito un numero dispari. Qual è la probabilità che sia maggiore di 2? **R.** $\frac{2}{3}$
3. È stata estratta una figura da 52 carte. Qual è la probabilità che sia di cuori? **R.** $\frac{1}{4}$
4. Un prodotto viene realizzato da due linee: la A produce il 60% dei pezzi e ha difettosità 3%; la B produce il 40% dei pezzi e ha difettosità 6%. Calcola la probabilità che un pezzo sia difettoso. **R.** $0,042 = 4,2\%$
5. Nell'esercizio precedente, sapendo che il pezzo è difettoso, calcola la probabilità che provenga dalla linea B. **R.** $\frac{4}{7} \approx 57,14\%$
6. Tre urne sono scelte con probabilità $1/2$, $1/3$, $1/6$. Le probabilità di estrarre una pallina rossa sono rispettivamente $1/4$, $1/2$, $3/5$. Calcola la probabilità totale di estrarre una pallina rossa. **R.** $\frac{47}{120}$
7. Nell'esercizio precedente, sapendo che la pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che sia stata scelta la terza urna? **R.** $\frac{12}{47} \approx 25,53\%$
8. Un test individua una certa caratteristica con sensibilità 90% e falso positivo 4%. La caratteristica è presente nel 5% della popolazione. Calcola la probabilità che una persona positiva abbia davvero la caratteristica. **R.** $\frac{45}{83} \approx 54,22\%$
9. In un sistema di controllo, il 10% degli avvisi è realmente grave. Il sensore segnala "alto rischio" nell'80% degli avvisi gravi e nel 15% degli avvisi non gravi. Se compare "alto rischio", qual è la probabilità che l'avviso sia davvero grave? **R.** $\frac{16}{43} \approx 37,21\%$
10. Una scuola riceve iscrizioni da tre zone: 30%, 45%, 25%. Le probabilità che uno studente scelga il potenziamento scientifico sono rispettivamente 40%, 30%, 20%. Calcola la probabilità totale che uno studente scelga il potenziamento scientifico; poi, sapendo che lo ha scelto, calcola la probabilità che provenga dalla prima zona. **R.** $0,305 = 30,5\%$, $\frac{24}{61} \approx 39,34\%$

Risoluzioni

1. Sia

$$A = \text{“il numero estratto è maggiore di 10”}, \quad B = \text{“il numero estratto è multiplo di 3”}.$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(B \mid A).$$

I numeri maggiori di 10 sono:

$$11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$$

Sono quindi 10 casi possibili. Tra questi, i multipli di 3 sono:

$$12, 15, 18.$$

I casi favorevoli sono dunque 3. Quindi:

$$p(B \mid A) = \frac{3}{10}.$$

2. Sia

$$A = \text{“esce un numero dispari”}, \quad B = \text{“esce un numero maggiore di 2”}.$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(B \mid A).$$

I numeri dispari del dado sono:

$$1, 3, 5.$$

Tra questi, quelli maggiori di 2 sono:

$$3, 5.$$

Pertanto:

$$p(B \mid A) = \frac{2}{3}.$$

3. Sia

$$F = \text{“la carta estratta è una figura”}, \quad C = \text{“la carta estratta è di cuori”}.$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(C \mid F).$$

In un mazzo da 52 carte ci sono 3 figure per ciascun seme, quindi in totale:

$$3 \cdot 4 = 12$$

figure. Le figure di cuori sono:

$$3.$$

Quindi:

$$p(C \mid F) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

4. Sia

$$A = \text{“il pezzo proviene dalla linea A”}, \quad B = \text{“il pezzo proviene dalla linea B”},$$

$$D = \text{“il pezzo è difettoso”}.$$

Abbiamo:

$$p(A) = 0,60, \quad p(B) = 0,40,$$

$$p(D | A) = 0,03, \quad p(D | B) = 0,06.$$

Per la formula della probabilità totale:

$$p(D) = p(A)p(D | A) + p(B)p(D | B).$$

Quindi:

$$p(D) = 0,60 \cdot 0,03 + 0,40 \cdot 0,06.$$

Calcoliamo:

$$p(D) = 0,018 + 0,024 = 0,042.$$

Pertanto:

$$p(D) = 0,042 = 4,2\%.$$

5. Riprendiamo i dati dell'esercizio precedente:

$$p(A) = 0,60, \quad p(B) = 0,40,$$

$$p(D | A) = 0,03, \quad p(D | B) = 0,06.$$

Abbiamo già calcolato:

$$p(D) = 0,042.$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(B | D).$$

Per il teorema di Bayes:

$$p(B | D) = \frac{p(B)p(D | B)}{p(D)}.$$

Sostituendo:

$$p(B | D) = \frac{0,40 \cdot 0,06}{0,042}.$$

Quindi:

$$p(B | D) = \frac{0,024}{0,042} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$

Pertanto:

$$p(B | D) = \frac{4}{7} \approx 57,14\%.$$

6. Siano

U_1 = “viene scelta la prima urna”, U_2 = “viene scelta la seconda urna”, U_3 = “viene scelta la terza urna”,

e

R = “viene estratta una pallina rossa”.

Abbiamo:

$$p(U_1) = \frac{1}{2}, \quad p(U_2) = \frac{1}{3}, \quad p(U_3) = \frac{1}{6},$$

$$p(R | U_1) = \frac{1}{4}, \quad p(R | U_2) = \frac{1}{2}, \quad p(R | U_3) = \frac{3}{5}.$$

Per la formula della probabilità totale:

$$p(R) = p(U_1)p(R | U_1) + p(U_2)p(R | U_2) + p(U_3)p(R | U_3).$$

Quindi:

$$p(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}.$$

Calcoliamo:

$$p(R) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{30}.$$

Poiché:

$$\frac{3}{30} = \frac{1}{10},$$

abbiamo:

$$p(R) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}.$$

Riducendo allo stesso denominatore:

$$p(R) = \frac{15}{120} + \frac{20}{120} + \frac{12}{120} = \frac{47}{120}.$$

Pertanto:

$$p(R) = \frac{47}{120} \approx 39,17\%.$$

7. Riprendiamo i dati dell'esercizio precedente. Dobbiamo calcolare:

$$p(U_3 | R).$$

Per il teorema di Bayes:

$$p(U_3 | R) = \frac{p(U_3)p(R | U_3)}{p(R)}.$$

Sappiamo che:

$$p(U_3) = \frac{1}{6}, \quad p(R | U_3) = \frac{3}{5},$$

e dall'esercizio precedente:

$$p(R) = \frac{47}{120}.$$

Quindi:

$$p(U_3 | R) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{47}{120}}.$$

Calcoliamo il numeratore:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Allora:

$$p(U_3 | R) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{47}{120}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{120}{47} = \frac{12}{47}.$$

Pertanto:

$$p(U_3 | R) = \frac{12}{47} \approx 25,53\%.$$

8. Sia

C = “la persona possiede la caratteristica”, $\bar{C}$ = “la persona non possiede la caratteristica”,

P = “il test risulta positivo”.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} p(C) &= 0,05, & p(\bar{C}) &= 0,95, \\ p(P | C) &= 0,90, & p(P | \bar{C}) &= 0,04. \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(C | P).$$

Per il teorema di Bayes:

$$p(C | P) = \frac{p(C)p(P | C)}{p(C)p(P | C) + p(\bar{C})p(P | \bar{C})}.$$

Sostituendo:

$$p(C | P) = \frac{0,05 \cdot 0,90}{0,05 \cdot 0,90 + 0,95 \cdot 0,04}.$$

Calcoliamo:

$$0,05 \cdot 0,90 = 0,045,$$

$$0,95 \cdot 0,04 = 0,038.$$

Quindi:

$$p(C | P) = \frac{0,045}{0,045 + 0,038} = \frac{0,045}{0,083}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per 1000:

$$p(C | P) = \frac{45}{83}.$$

Pertanto:

$$p(C | P) = \frac{45}{83} \approx 54,22\%.$$

9. Sia

G = “l’avviso è realmente grave”, $\overline{G}$ = “l’avviso non è grave”,

A = “il sensore segnala alto rischio”.

Abbiamo:

$$p(G) = 0,10, \quad p(\overline{G}) = 0,90,$$

$$p(A | G) = 0,80, \quad p(A | \overline{G}) = 0,15.$$

Dobbiamo calcolare:

$$p(G | A).$$

Per il teorema di Bayes:

$$p(G | A) = \frac{p(G)p(A | G)}{p(G)p(A | G) + p(\overline{G})p(A | \overline{G})}.$$

Sostituendo:

$$p(G | A) = \frac{0,10 \cdot 0,80}{0,10 \cdot 0,80 + 0,90 \cdot 0,15}.$$

Calcoliamo:

$$0,10 \cdot 0,80 = 0,08,$$

$$0,90 \cdot 0,15 = 0,135.$$

Quindi:

$$p(G | A) = \frac{0,08}{0,08 + 0,135} = \frac{0,08}{0,215}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per 1000:

$$p(G | A) = \frac{80}{215} = \frac{16}{43}.$$

Pertanto:

$$p(G | A) = \frac{16}{43} \approx 37,21\%.$$

10. Siano

Z_1 = “lo studente proviene dalla prima zona”,

Z_2 = “lo studente proviene dalla seconda zona”,

Z_3 = “lo studente proviene dalla terza zona”,

e

S = “lo studente sceglie il potenziamento scientifico”.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}p(Z_1) &= 0,30, & p(Z_2) &= 0,45, & p(Z_3) &= 0,25, \\p(S | Z_1) &= 0,40, & p(S | Z_2) &= 0,30, & p(S | Z_3) &= 0,20.\end{aligned}$$

Per la formula della probabilità totale:

$$p(S) = p(Z_1)p(S | Z_1) + p(Z_2)p(S | Z_2) + p(Z_3)p(S | Z_3).$$

Quindi:

$$p(S) = 0,30 \cdot 0,40 + 0,45 \cdot 0,30 + 0,25 \cdot 0,20.$$

Calcoliamo:

$$p(S) = 0,12 + 0,135 + 0,05 = 0,305.$$

Pertanto:

$$p(S) = 0,305 = 30,5\%.$$

Ora calcoliamo la probabilità che uno studente provenga dalla prima zona, sapendo che ha scelto il potenziamento scientifico:

$$p(Z_1 | S).$$

Per il teorema di Bayes:

$$p(Z_1 | S) = \frac{p(Z_1)p(S | Z_1)}{p(S)}.$$

Sostituendo:

$$p(Z_1 | S) = \frac{0,30 \cdot 0,40}{0,305}.$$

Quindi:

$$p(Z_1 | S) = \frac{0,12}{0,305}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per 1000:

$$p(Z_1 | S) = \frac{120}{305} = \frac{24}{61}.$$

Pertanto:

$$p(Z_1 | S) = \frac{24}{61} \approx 39,34\%.$$