Coniche: classificazione e rotazione degli assi

Prof. E. Modica

Obiettivo della lezione. Riconoscere il tipo di conica a partire dall'equazione generale di secondo grado e, quando compare il termine misto xy, usare una rotazione degli assi per ricondurre l'equazione alla sua forma canonica.

1. La forma generale di una conica

Nel piano cartesiano una conica può essere descritta, in forma generale, da un'equazione del tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dove A, B e C non sono tutti nulli. *Il segno del discriminante della parte quadratica* permette una prima classificazione della conica:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Valore di Δ	Tipo di conica
$\Delta < 0$	ellisse oppure circonferenza
$\Delta = 0$	parabola
$\Delta > 0$	iperbole

Osservazione importante. Il discriminante Δ consente di capire la famiglia della conica, ma non basta da solo a descriverla completamente: per esempio, il caso $\Delta < 0$ comprende sia l'ellisse sia la circonferenza.

2. Quando compare il termine misto xy

Se $B = 0$, l'equazione non contiene il termine misto xy e ricondurre la conica alla forma canonica è più semplice. Se invece $B \neq 0$, conviene ruotare gli assi cartesiani.

Con una rotazione di ampiezza α si pone:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione iniziale, si può scegliere α in modo da annullare il coefficiente del termine $x'y'$. Nel caso generale la condizione è:

$$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0.$$

Equivalentemente, se $A \neq C$,

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}.$$

Caso molto frequente. Se $A = C$ e $B \neq 0$, allora basta scegliere $\alpha = \pi/4$ oppure $\alpha = -\pi/4$.

3. Esempio guidato

Studiamo la conica

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0.$$

Passo 1: classificazione con Δ. Si ha: $A = 4$, $B = 8$, $C = 4$, quindi

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 - 64 = 0.$$

La conica è una **parabola**.

Passo 2: eliminazione del termine misto. Sostituiamo nell'equazione della conica le equazioni della trasformazione e, per semplicità, eliminiamo gli apici:

$$4(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + 8(x\cos\alpha + y\sin\alpha)(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 4(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 +$$

$$\sqrt{2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \sqrt{2}(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0$$

da cui:

$$4x^2\cos^2\alpha + 4y^2\sin^2\alpha + 8xy\sin\alpha\cos\alpha - 8x^2\sin\alpha\cos\alpha + 8xy\cos^2\alpha - 8xy\sin^2\alpha + 8y^2\sin\alpha\cos\alpha +$$

$$4x^2\sin^2\alpha + 4y^2\cos^2\alpha - 8xy\sin\alpha\cos\alpha + x\sqrt{2}\cos\alpha + y\sqrt{2}\sin\alpha + x\sqrt{2}\sin\alpha - y\sqrt{2}\cos\alpha = 0$$

Passo 3: imponiamo che sia nullo il termine rettangolare. Imponiamo:

$$8xy\cos^2\alpha - 8xy\sin^2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 8xy\cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Passo 4: sostituzione e semplificazione. Sostituendo nell'equazione del passo 2 l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, si ottiene:

$$4x^2 \cdot \frac{1}{2} + 4y^2 \cdot \frac{1}{2} - 8x^2 \cdot \frac{1}{2} + 8y^2 \cdot \frac{1}{2} + 4x^2 \cdot \frac{1}{2} + 4y^2 \cdot \frac{1}{2} + x + y + x - y = 0$$

da cui:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x^2 + 4y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 8y^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4y^2$$

Conclusione. Nel sistema ruotato la conica ha equazione canonica $x = -4y^2$, quindi è una parabola con vertice nell'origine e asse parallelo a quello delle ascisse del nuovo riferimento. Nel sistema originale la stessa parabola appare ruotata di 45°.

4. Procedura operativa

1. Leggi i coefficienti A, B, C, D, E, F dell'equazione generale.
2. Calcola il discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ per riconoscere il tipo di conica.
3. Se $B = 0$, prova a ricondurre l'equazione a una forma canonica completando i quadrati.
4. Se $B \neq 0$, valuta una rotazione degli assi per eliminare il termine misto xy.
5. Dopo la rotazione, riduci l'equazione e interpreta geometricamente la conica ottenuta.

5. Esercizi di consolidamento

A. Classificazione rapida

1. $2x^2 + 3xy + 5y^2 - 7 = 0$
2. $x^2 - 6xy + 5y^2 + 1 = 0$
3. $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 3y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

B. Riduzione con rotazione degli assi

1. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 1 = 0$
2. $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$
3. $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y = 0$

C. Domanda di riflessione

Spiega perché il discriminante Δ dipende soltanto dalla parte quadratica dell'equazione e non dai termini lineari D ed E né dal termine noto F.

6. Soluzioni essenziali

A. Classificazione rapida

1. $\Delta = 9 - 40 = -31$, quindi ellisse.
2. $\Delta = 36 - 20 = 16$, quindi iperbole.
3. $\Delta = 16 - 16 = 0$, quindi parabola.
4. $\Delta = 0 - 4 = -4$, quindi ellisse; in questo caso, poiché $A = C$ e $B = 0$, si tratta in realtà di una circonferenza.

B. Rotazione degli assi

1. Con $\alpha = \pi/4$ si ottiene $x^2 + 5y^2 = 1$: ellisse.
2. Con $\alpha = \pi/4$ si ottiene $3x^2 - y^2 = 1$: iperbole.
3. Con $\alpha = \pi/4$ si ottiene $2y^2 - 4x = 0$, cioè $x' = \dfrac{y^2}{2}$: parabola.

C. Riflessione

Il discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ coinvolge solo i coefficienti dei termini di secondo grado perché serve a studiare la parte quadratica dell'equazione, cioè la struttura geometrica fondamentale della conica prima di traslazioni e aggiustamenti dovuti ai termini lineari e al termine noto.