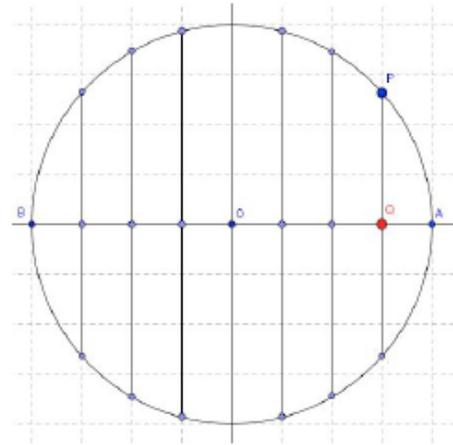


Il moto armonico e il moto circolare

Consideriamo un punto che si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio R .

Com'è possibile notare dal grafico a fianco, quando il punto P si muove lungo la circonferenza, la sua proiezione Q sul diametro si muove dal punto A al punto B e dal punto B ritorna al punto A .

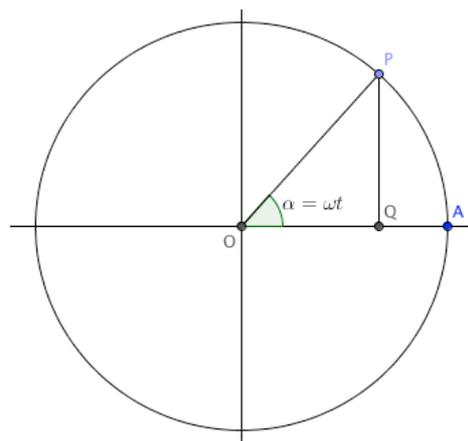
Definizione. Dato un punto P che si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza, si definisce **moto armonico** il moto della proiezione di tale punto su un diametro della circonferenza.



I punti A e B tra i quali oscilla Q prendono il nome di **estremi di oscillazione**, il centro della circonferenza viene detto **centro di oscillazione**, mentre la distanza $\overline{OA} = \overline{OB}$ prende il nome di **ampiezza** ed è uguale al raggio della circonferenza. Invece la distanza di una generica posizione del punto Q dal centro di oscillazione prende il nome di **elongazione**.

Il punto Q , dopo esser partito da A , arrivato in B e ritornato in A , ha compiuto un'**oscillazione completa**. La durata di tale oscillazione prende il nome di **periodo** del moto armonico e viene indicato con la lettera T . Tale periodo coincide con quello del moto circolare compiuto dal punto P . Così come nel caso del moto armonico, la **frequenza** è sempre data dall'inverso del periodo. Inoltre, la velocità angolare del moto circolare uniforme compiuto da P , prende il nome di **pulsazione** del moto armonico.

La legge oraria del moto armonico



Consideriamo un punto P che si muove di moto circolare uniforme e sia Q la sua proiezione sul diametro della circonferenza. Le posizioni di P e Q variano al variare dell'angolo α come mostrato in figura. Nel caso del moto circolare uniforme sappiamo che la velocità angolare è data da:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha - \alpha_0}{t - t_0}$$

da cui, ponendo α_0 e t_0 uguali a zero si ha:

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

e quindi:

$$\alpha = \omega t$$

Ricordando che in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è pari al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo ad esso adiacente, dal triangolo OPQ ricaviamo che:

$$OQ = OP \cdot \cos \alpha$$

ossia:

$$s = R \cdot \cos \omega t$$

che rappresenta la legge oraria del moto armonico.

Per determinare la legge oraria del moto basta conoscere il raggio R della circonferenza e la pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Problema svolto. Scrivere la legge oraria di un moto armonico sapendo che la sua ampiezza massima è pari a 0,4 cm e che il suo periodo è pari a 6 s.

- Determinare l'elongazione dopo 3 s.
- Determinare l'elongazione dopo 6 s.
- Determinare l'elongazione dopo 8 s.

Inserendo i dati nella legge oraria si ha:

$$s = R \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) = 0,4 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \cdot t \right)$$

a) Sostituendo si ha:

$$s(3s) = 0,4 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \cdot 3 \right) = 0,4 \cdot \cos \pi = 0,4 \cdot (-1) = -0,4m$$

b) Sostituendo si ha:

$$s(6s) = 0,4 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \cdot 6 \right) = 0,4 \cdot \cos 2\pi = 0,4 \cdot (1) = 0,4m$$

c) Sostituendo si ha:

$$s(8s) = 0,4 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} \cdot 8 \right) = 0,4 \cdot \cos(2,67\pi) = 0,4 \cdot (0,99) = 0,39m$$

Considerazioni sulla velocità

Poiché il punto Q percorre tratti diversi in tempi uguali (a differenza di P che percorre archi di circonferenza uguali in tempi uguali), ne segue che **il suo moto non è uniforme**; inoltre la velocità di Q è uguale a zero negli estremi di oscillazione, punti in cui Q si ferma per invertire il moto, è massima nel centro di oscillazione ed è uguale a:

$$v_{max} = \omega \cdot R$$

Esempio. Per generare il suono, il cono di un altoparlante oscilla avanti e indietro muovendosi di moto armonico. La frequenza delle oscillazioni è $f=1,0$ kHz e la loro ampiezza è $R=0,2$ mm. Qual è la massima velocità del cono?

Per determinare la velocità è necessario sfruttare la precedente relazione. Si ha:

$$v_{max} = R\omega = R \cdot (2\pi f) = (0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot (2\pi) \cdot (1,0 \cdot 10^3 \text{ Hz}) = 1,3 \text{ m/s}$$

Considerazioni sull'accelerazione

Si dimostra che se il punto materiale compie un moto armonico di pulsazione ω e se s è la sua distanza dal centro di oscillazione in un determinato istante, allora la sua accelerazione in quell'istante è pari a:

$$a = -\omega^2 \cdot s$$

L'accelerazione non è costante, ovvero è nulla nel centro di oscillazione, dove $s=0$, è massima agli estremi di oscillazione, dove s è massima. L'accelerazione è inoltre sempre diretta verso il centro di oscillazione.

Caratterizzazione dei moti armonici. Tutti i corpi che sono sottoposti a un'accelerazione che risulti direttamente proporzionale allo spostamento e di verso opposto ad esso, si muovono di moto armonico.

Esempio. Per generare il suono, il cono di un altoparlante oscilla avanti e indietro muovendosi di moto armonico. La frequenza delle oscillazioni è $f=1,0$ kHz e la loro ampiezza è $R=0,2$ mm. Qual è il valore massimo dell'accelerazione del cono?

Utilizzando la precedente relazione si ha:

$$a_{max} = \omega^2 \cdot R = R \cdot (2\pi f)^2 = (0,2 \cdot 10^{-3}) \cdot [(2\pi) \cdot (1,0 \cdot 10^3)]^2 = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$$

Esercizi proposti

- 1) Un punto percorre una circonferenza con la velocità angolare costante pari a $4,5$ rad/s. La sua ombra, proiettata su un diametro della circonferenza, si muove di moto armonico. Calcola il periodo e la frequenza di tale moto armonico.

- 2) Un punto percorre una circonferenza di raggio 0,25 m con la velocità di modulo costante di 0,86 m/s. La sua ombra, proiettata su un diametro della circonferenza stessa, si muove di moto armonico. Calcola l'ampiezza e la frequenza di tale moto.
- 3) Un oggetto si muove di moto armonico con ampiezza 1,5 m e periodo 1,6 s. Calcola la massima velocità che raggiunge.
- 4) Un corpo si muove di moto armonico di ampiezza 48 cm. Nel punto centrale della traiettoria, la sua velocità è uguale a 2,8 m/s. Calcola la frequenza del moto.
- 5) Un oggetto si muove di moto armonico con ampiezza 0,7 m e periodo 1,1 s. Calcola la massima accelerazione cui è sottoposto.
- 6) Un oggetto si muove di moto armonico con ampiezza 0,6 m e periodo 0,8 s.
 - a) Scrivere l'equazione del moto.
 - b) Determinare la posizione dopo 10 s.
 - c) Determinare la velocità dopo 10 s.
 - d) Determinare l'accelerazione dopo 10 s.
 - e) Dopo quanto tempo si trova a 0,3 m dall'origine?