RICHIAMI DI MATEMATICA

Prof. Erasmo Modica
emodica@liceocannizzaropalermo.edu.it

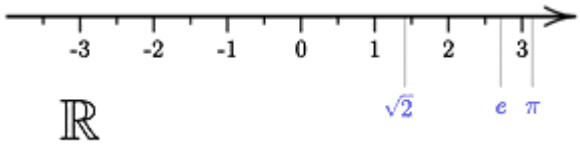
GEOMETRIA ANALITICA

LE COORDINATE CARTESIANE

Quando si vuole fissare un sistema di coordinate cartesiane su una retta r, è necessario considerare:
- un punto O detto ***origine***;
- un verso di percorrenza;
- un punto P a destra di O in modo la lunghezza del segmento OP sia l'unità di misura.

Definizione: Dicesi ***ascissa*** di un punto P della retta r, la misura del segmento OP.

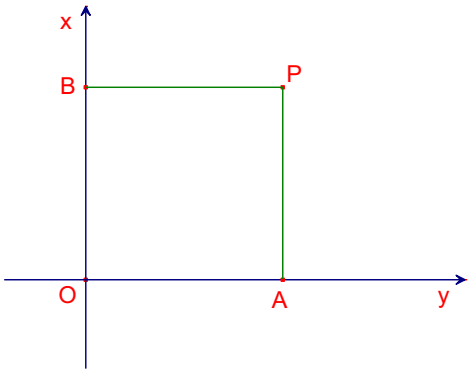
In generale la misura del segmento orientato PQ è ***positiva*** quando P precede Q, ***negativa*** quando P segue Q.
In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali ed i punti della retta.



COORDINATE CARTESIANE NEL PIANO

Se si vuole fissare un sistema di coordinate cartesiane nel piano, si procede in maniera analoga a quanto fatto nel caso della retta, cioè:
- si considerano due rette orientate x e y nel piano tra loro perpendicolari e si indica con O il loro punto di intersezione;
- si fissa una unità di misura u comune alle due rette.

Le rette considerate dividono in piano in quattro parti e il sistema che si viene a formare prende il nome di ***piano cartesiano ortogonale***. Le rette x e y prendono il nome di ***asse delle ascisse*** e ***asse delle ordinate*** ed il loro punto di intersezione viene detto ***origine del sistema***.
Preso un qualsiasi punto P del piano se si tracciano le perpendicolari agli assi cartesiani, i loro piedi individuano due segmenti, uno sull'asse delle ascisse e uno sull'asse delle ordinate. Al punto P si può associare una coppia ordinata di numeri reali (x, y) che rappresentano, rispettivamente, la misura del segmento orientato OA e la misura del segmento OB. Tali numeri prendono il nome di ***coordinate cartesiane del punto P*** e, in particolare, x viene detto ***ascissa*** e y ***ordinata*** di P.



Le rette ortogonali suddividono il piano in quattro quadranti che vengono numerati in senso antiorario a partire dal quadrante in alto a destra. Le coordinate dei punti possono quindi essere sia positive che negative, in particolare:

- i punti del I quadrante hanno ascissa e ordinata positiva;
- i punti del II quadrante hanno ascissa negativa e ordinata positiva;
- i punti del III quadrante hanno sia ascissa che ordinata negativa;
- i punti del IV quadrante hanno ascissa positiva e ordinata negativa.

È bene osservare che così come ogni punto determina una coppia di numeri, una coppia di numeri reali determina un unico punto del piano cartesiano. Per tale ragione esiste una corrispondenza biunivoca tra il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano:

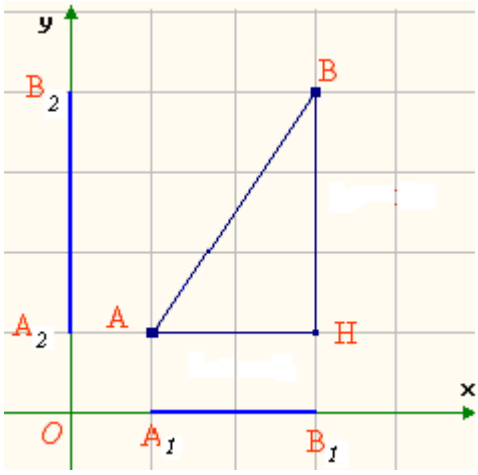
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad \{insieme\ dei\ punti\ del\ piano\}$$

DISTANZA ASSOLUTA TRA DUE PUNTI DEL PIANO

Uno dei primi problemi che ci si presentano in geometria analitica è quello di calcolare la distanza tra due punti del piano cartesiano. Si vuole quindi determinare, dati i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la loro distanza.

Dalla figura a lato si deduce che:

$$\overline{OA_1} = x_1 \qquad \overline{OA_2} = x_2$$
$$\overline{OB_1} = y_1 \qquad \overline{OB_2} = y_2$$
$$\overline{A_1B_1} = |x_2 - x_1| \qquad \overline{A_1B_1} = |y_2 - y_1|$$



Quindi:

$$\overline{AH} = |x_2 - x_1| \qquad \overline{BH} = |y_2 - y_1|$$

e, per il Teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Osservazione: In particolare quando i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata, la formula si riduce a una delle due:

$$\overline{AB} = |y_2 - y_1| \qquad \overline{AB} = |x_2 - x_1|$$

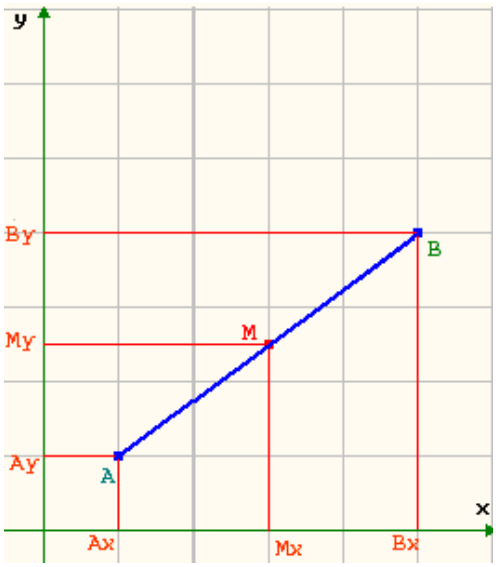
Inoltre la distanza di un punto A dall'origine O è data dalla formula:

$$\overline{AO} = \sqrt{x_A^{\ 2} + y_A^{\ 2}}$$

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Vogliamo trovare le coordinate del punto medio M di un segmento i cui estremi sono i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Sia M il punto medio del segmento AB, allora, anche M_y è il punto medio di B_yA_y ed M_x è il punto medio di B_xA_x. Inoltre se M_x è il punto medio di B_xA_x allora:



$$x_M = OA_x + \frac{A_xB_x}{2} = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{2x_A + x_B - x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = OA_y + \frac{A_yB_y}{2} = y_A + \frac{y_B - y_A}{2} = \frac{2y_A + y_B - y_A}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

In definitiva:

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$	$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Esempio: Calcolare il punto medio del segmento avente come estremi i punti di coordinate $\boldsymbol{A(-3, 1)}$ e $\boldsymbol{B(-1, 3)}$.

Applicando le formule precedentemente determinate si ha:

$$x_M = \frac{-3-1}{2} = -2$$

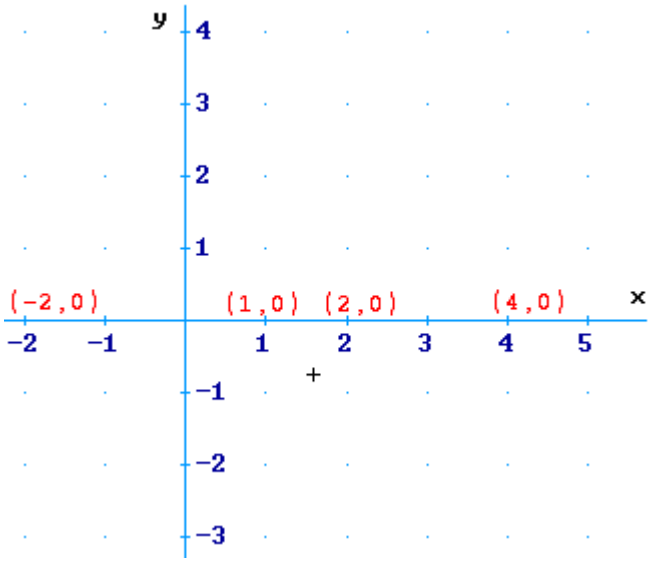
$$y_M = \frac{1+3}{2} = 2$$

Dimostriamo adesso che ogni retta del piano cartesiano può essere rappresentata mediante una equazione di primo grado.

ASSE DELLE ASCISSE

Dalla figura è semplice notare che tutti i punti dell'asse delle ascisse sono caratterizzati dall'avere la seconda coordinata nulla. Tale asse è quindi il luogo geometrico dei punti del piano aventi la seconda coordinata nulla. Algebricamente si ha:

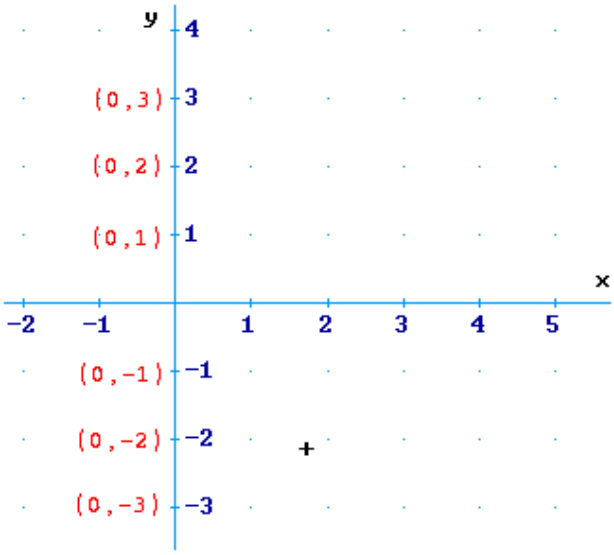
$$y = 0$$



ASSE DELLE ORDINATE

Dalla figura è semplice notare che tutti i punti dell'asse delle ordinate sono caratterizzati dall'avere la prima coordinata nulla. Tale asse è quindi il luogo geometrico dei punti del piano aventi la prima coordinata nulla. Algebricamente si ha:

$$x = 0$$

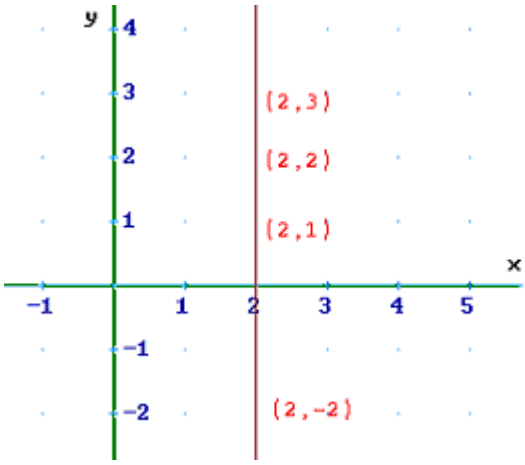


RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ORDINATE

È intuitivo notare che ogni retta parallela all'asse delle ordinate è costituita da un insieme di punti aventi uguale la prima coordinata. Algebricamente tale condizione si traduce mediante l'equazione:

$$x = h$$

con $h \in \mathbb{R}$.

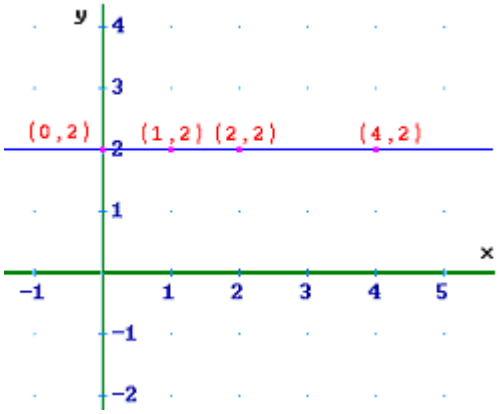


RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ASCISSE

È intuitivo notare che ogni retta parallela all'asse delle ascisse è costituita da un insieme di punti aventi uguale la seconda coordinata. Algebricamente tale condizione si traduce mediante l'equazione:

$$y = k$$

con $k \in \mathbb{R}$.



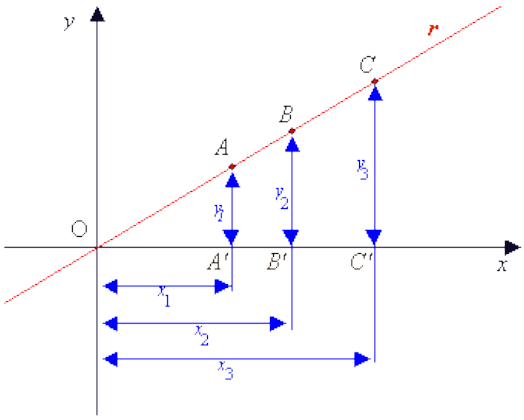
RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE

Si consideri una retta passante per l'origine si scelgano su di essa un numero arbitrario di punti. Per fissare le idee consideriamo i punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, …

È semplice dimostrare che i triangoli OAA', OBB', OCC', ... sono simili e quindi sussiste la relazione:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \ldots$$

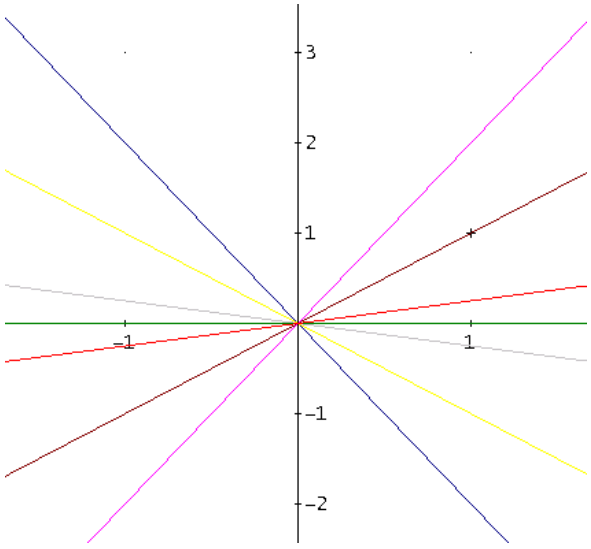
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = m$$



dove con m si indica il rapporto costante. Dato che la relazione è valida per qualsiasi punto della retta considerata, possiamo concludere che i punti di tali retta costituiscono il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto tra la loro ordinata e la loro ascissa.
In formule, considerato il generico punto $P(x, y)$ si ha:

$$\frac{y}{x} = m, \text{ cioè } y = mx$$

La costante m prende il nome di ***coefficiente angolare*** e ci dà informazioni sulla pendenza della retta, cioè sull'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse. In generale se il coefficiente angolare è positivo la retta forma con l'asse delle ascisse un angolo acuto, se il coefficiente angolare è negativo l'angolo formato è ottuso.



RETTA GENERICA

Si dimostra che l'equazione di una generica retta nel piano cartesiano che non rientri in uno dei casi precedentemente studiati è:

$$y = mx + q$$

La costante m viene ancora chiamata coefficiente angolare e q viene detta ***intercetta*** o ***ordinata all'origine***, e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta r con l'asse y.

Abbiamo in pratica fatto vedere che presa una qualunque retta nel piano cartesiano, la sua equazione è sempre una equazione di primo grado.

PARALLELISMO E PERPENDICOLARITÀ DI RETTE

PARALLELISMO DI RETTE

Come osservato in precedenza, il coefficiente angolare esprime la pendenza di una retta, cioè la sua inclinazione rispetto all'asse delle ascisse. È facile intuire che due rette parallele sono inclinate allo stesso modo rispetto al suddetto asse, di conseguenza i loro coefficienti angolari sono uguali.

Teorema: *Date le rette* $y = mx + q$ *e* $y = m'x + q'$, *non parallele all'asse delle ordinate, esse sono parallele se, e solo se, hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè:*

$$m = m'$$

Esempio: Le rette $y = 3x - 2$ e $y = 3x - \frac{1}{2}$ sono parallele, in quanto hanno lo stesso coefficiente angolare.

PERPENDICOLARITÀ DI RETTE

Teorema: *Date le rette* $y = mx + q$ *e* $y = m'x + q'$, *non parallele agli assi, esse sono perpendicolari se, e solo se,il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1, cioè:*

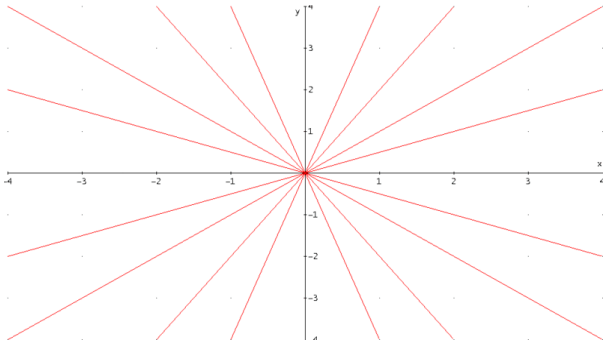
$$m \cdot m' = -1$$

Esempio: Le rette $y = 3x - 2$ e $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ sono perpendicolari, in quanto il prodotto dei loro coefficienti angolari è pari a -1.

FASCI DI RETTE

FASCIO PROPRIO

<u>Definizione</u>: Dicesi ***fascio proprio di rette*** l'insieme di tutte le rette del piano passanti per un punto fisso detto ***centro*** del fascio.



Si dimostra che dato il centro $P(x_0, y_0)$, la totalità delle rette passanti per P ha equazione del tipo:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Osservazione: Come si può notare dall'equazione, tutte le rette del fascio passano per il punto P e la totalità delle rette si ottiene assegnando diversi valori al coefficiente angolare m.

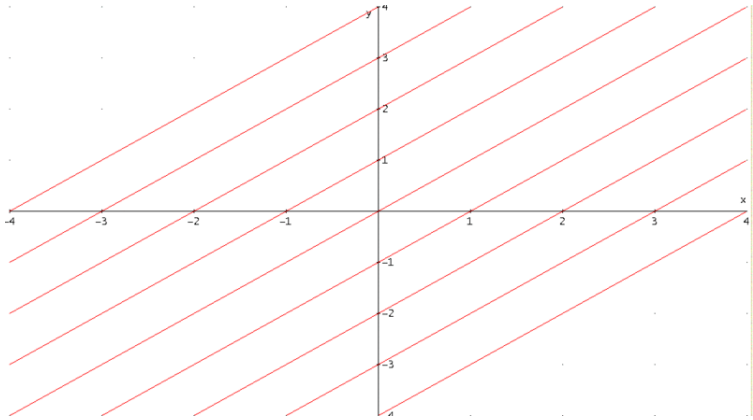
Esempio: *Scrivere l'equazione del fascio di rette passante per il punto* $P(1, 2)$.

Si ha:

$$y - 2 = m(x - 1)$$

FASCIO IMPROPRIO

Definizione: Dicesi ***fascio improprio di rette*** l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una retta data detta ***base*** del fascio.



Nel caso di un fascio improprio di rette, l'inclinazione di tutte le rette non varia e, di conseguenza, il loro coefficiente angolare rimane sempre m. Ciò che differenzia le varie rette è la loro intersezione con l'asse delle ordinate, ovvero l'intercetta all'origine. Di conseguenza l'equazione del fascio di rette parallele a una retta data $y = mx + q$ è:

$$\boxed{y = mx + k}$$

Esempio: *Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette avente come retta base la retta di equazione* $y = 3x - 5$.

Si ha:

$$y = 3x + k$$

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

Date due rette nel piano, si possono presentare le seguenti possibilità:

1. le due rette sono coincidenti;
2. le due rette sono incidenti;
3. le due rette sono parallele.

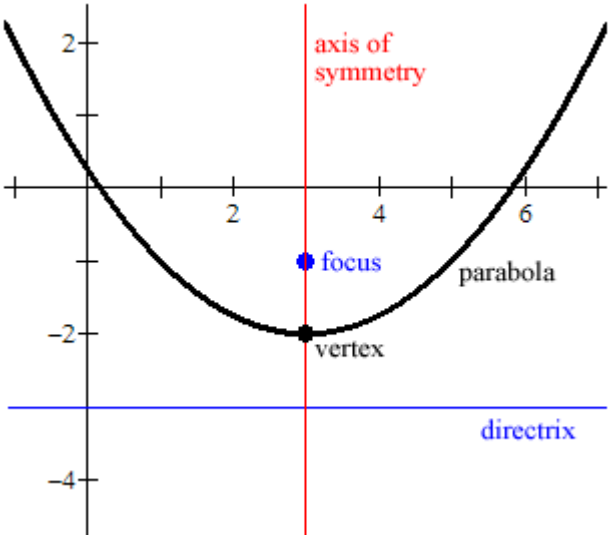
Per studiare la posizione di due rette nel piano basta studiare il sistema avente come equazioni le due equazioni delle rette considerate, cioè:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$$

Si osserva facilmente che:

1. se il sistema è ***indeterminato***, allora le rette sono ***coincidenti***;
2. se il sistema è ***determinato***, allora le rette sono ***incidenti***;
3. se il sistema è ***impossibile***, allora le rette sono ***parallele***.

Definizione: Dicesi ***parabola*** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.



Parabola $y = a\,x^2$

a > 0 → concavità verso l'alto
a < 0 → concavità verso il basso
vertice → V(0 ; 0)
asse di simmetria → x = 0 (asse y)
fuoco → $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$
direttrice → $y=-\frac{1}{4a}$

Parabola $x = ay^2 + by + c$

a > 0 → concavità verso destra
a < 0 → concavità verso sinistra
vertice → $V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$
asse di simmetria → $y=-\frac{b}{2a}$
fuoco → $F\left(\frac{1-\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$
direttrice → $x=-\frac{1+\Delta}{4a}$

Parabola $y = ax^2 + bx + c$

a > 0 → concavità verso l'alto
a < 0 → concavità verso il basso
vertice → $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2-4ac$
asse di simmetria → $x=-\frac{b}{2a}$
fuoco → $F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$
direttrice → $y=-\frac{1+\Delta}{4a}$

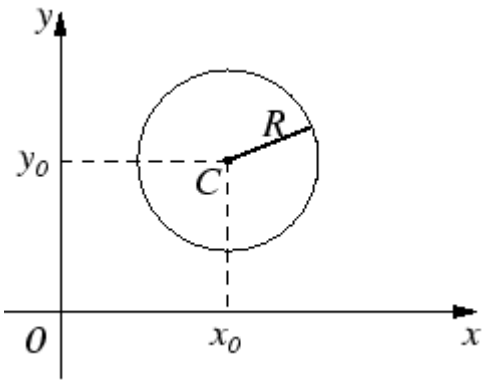
Fascio di parabole

$$y - ax^2 - bx - c + k\,(y - a_1x^2 - b_1x - c_1) = 0$$

se γ_1 e γ_2 hanno 2 punti in comune ➔ tutte le parabole del fascio passano per tali punti (**punti base**)

Definizione: Dicesi ***circonferenza*** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro. Tale distanza comune a tutti i punti prende il nome di ***raggio*** della circonferenza.

$$\boldsymbol{C = \{P \in \mathbb{R}^2 : \overline{PC} = r, con\ r \geq 0\}}$$



Equazione della circonferenza di centro $\boldsymbol{C(x_0, y_0)}$ e raggio $\boldsymbol{r}$: $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$

Equazione della circonferenza di centro $\boldsymbol{C(0, 0)}$ e raggio $\boldsymbol{r}$: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

Equazione della generica circonferenza: $\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

Intersezione fra 2 circonferenze → Basta intersecarne una con l'asse radicale:

Asse radicale: $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$ $\qquad \Gamma_1 - \Gamma_2$

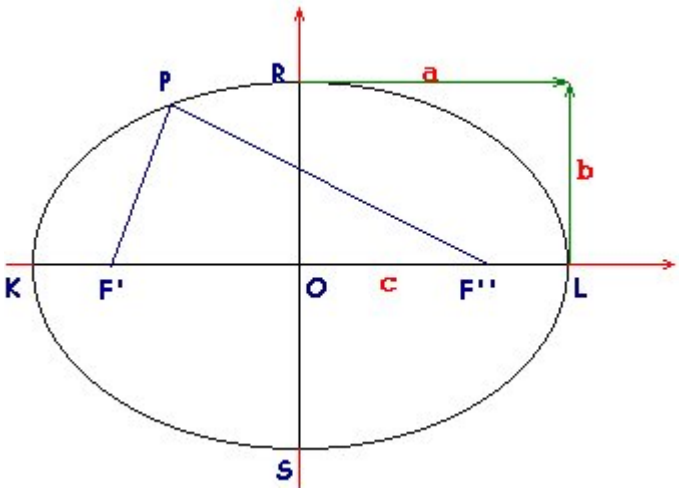
Fascio di circonferenze: Tutte le circonferenze del fascio di equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

hanno i centri appartenenti ad una medesima perpendicolare all'asse radicale delle due circonferenze se γ_1 e γ_2 hanno 2 punti in comune ➔ tutte le circonferenze del fascio passano per tali punti (*punti base*)

Definizione: Dicesi ***ellisse*** il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti ***fuochi***.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^2 : \overline{\boldsymbol{PF'}} + \overline{\boldsymbol{PF''}} = \boldsymbol{2a}, \overline{\boldsymbol{F'F''}} = \boldsymbol{2c}, \boldsymbol{a} > \boldsymbol{c} > 0\}$$



Equazione: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

I caso: $a > b$

I fuochi appartengono all'asse delle ascisse: $\boldsymbol{F_1(-c, 0)}$ $\boldsymbol{F_2(c, 0)}$ con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
L'eccentricità è data da: $0 \leq e = \frac{c}{a} < 1$ (se $e = 0$ si ha una circonferenza)
Per determinare le intersezioni tra una retta e un'ellisse si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

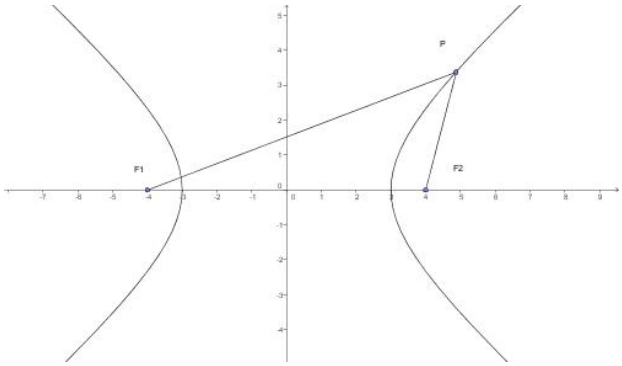
II caso: $a < b$

I fuochi appartengono all'asse delle ordinate: $\boldsymbol{F_1(0, -c)}$ $\boldsymbol{F_2(0, c)}$ con $c = \sqrt{b^2 - a^2}$
L'eccentricità è data da: $0 \leq e = \frac{c}{b} < 1$ (se $e = 0$ si ha una circonferenza)
Per determinare le intersezioni tra una retta e un'ellisse si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Definizione: Dicesi ***iperbole*** il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti ***fuochi***.

$$\mathcal{I} = \{\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^2 : |\overline{\boldsymbol{PF'}} - \overline{\boldsymbol{PF''}}| = \boldsymbol{2a}, \overline{\boldsymbol{F'F''}} = \boldsymbol{2c}, \boldsymbol{c} > \boldsymbol{a} > 0\}$$



Equazione dell'iperbole con fuochi sull'asse delle ascisse : $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

I fuochi hanno coordinate: $\boldsymbol{F_1(-c, 0)}$ $\boldsymbol{F_2(c, 0)}$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
L'eccentricità è data da: $e = \frac{c}{a} > 1$
Per determinare le intersezioni tra una retta e un'ellisse si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Equazione dell'iperbole con fuochi sull'asse delle ordinate : $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$

I fuochi hanno coordinate: $\boldsymbol{F_1(0, -c)}$ $\boldsymbol{F_2(0, c)}$ con $c = \sqrt{b^2 + a^2}$
L'eccentricità è data da: $e = \frac{c}{b} > 1$
Per determinare le intersezioni tra una retta e un'ellisse si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Asintoti: Sono le rette di equazione $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$.

Equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria: $x^2 - y^2 = a^2$

Asintoti dell'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria: $y = -x$ e $y = x$

Equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti: $xy = k$

Funzione omografica: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $con\ c \neq 0, ad - bc \neq 0$

POTENZA CON ESPONENTE REALE

Definizione: Dati un numero reale $a > 0$ ed un numero reale x qualunque, si definisce ***potenza con esponente reale*** del numero a il numero reale a^x.

Osservazione: Questa potenza risulta essere sempre un numero reale positivo!

PROPRIETÀ DELLE POTENZE CON ESPONENTE REALE

1. Se $a > 1$ e $x < y$, allora $a^x < a^y$.
2. Se $0 < a < 1$ e $x < y$, allora $a^x > a^y$.
3. $a^x b^x = (ab)^x \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $a^x b^y = a^{x+y} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
6. $a^x : b^x = a^{x-y} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $a^x : b^x = (a : b)^x \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Esempi:

1. $5^{\sqrt{2}} < 5^{\sqrt{3}}$
2. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sqrt{3}}$

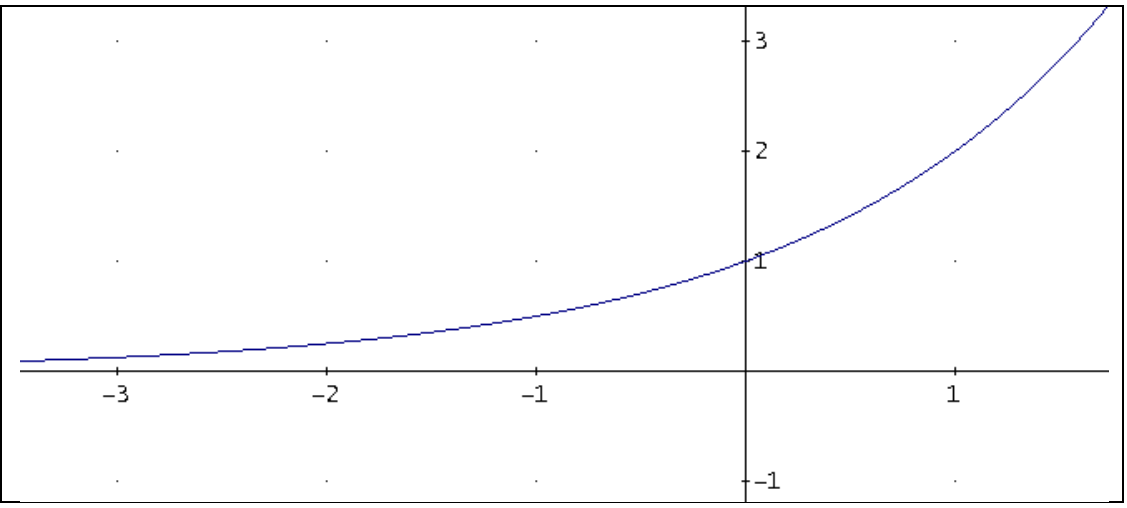
GRAFICO ESPONENZIALE

Vogliamo studiare il comportamento della relazione di dipendenza $y = a^x$ al variare di $a \in \mathbb{R}^+$. Per fare ciò distinguiamo i due seguenti casi.

I CASO: $a > 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = 2$.

x	y
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8



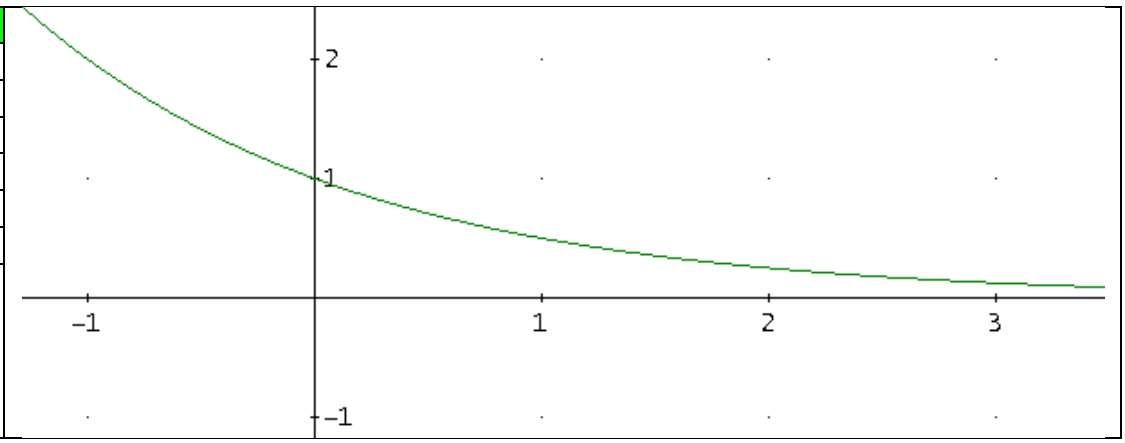
Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- ogni valore di x ha un corrispondente y;
- i valori del corrispondente y sono tutti positivi, cioè $a^x \geq 0$;
- vale la proprietà di crescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$.

II CASO: $0 < a < 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = \frac{1}{2}$.

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125



Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- ogni valore di x ha un corrispondente y;
- i valori del corrispondente y sono tutti positivi, cioè $a^x \geq 0$;
- vale la proprietà di decrescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2}$.

LOGARITMI

Il teorema precedente ci permette di stabilire che dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, l'equazione $a^x = b$ ammette una e una sola soluzione. Tale soluzione si chiama logaritmo di b in base a e si indica con:

$$\log_a b$$

Definizione: Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, si chiama ***logaritmo in base a del numero b*** l'unica soluzione dell'equazione $a^x = b$, cioè quell'unico numero α, che dato come esponente ad a, rende la potenza a^α uguale a b.

Pertanto le scritture:

$$\alpha = \log_a b \qquad \text{e} \qquad a^\alpha = b$$

sono equivalenti.

Il numero b si chiama ***argomento*** del logaritmo e deve essere un numero positivo.

Osservazione: La definizione di logaritmo permette di affermare che ogni numero reale positivo b si può scrivere, in modo unico, come potenza di un altro qualsiasi numero a positivo, diverso da 1.

È infatti:

$$b = a^{\log_a b}$$

In altre parole ogni numero $b > 0$ si può pensare come potenza di base prefissata, qualsiasi, positiva e diversa da 1.

Esempi:

1. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$, perché è $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
2. $\log_5 1 = 0$ perché è $5^0 = 1$.
3. $\log_7 7 = 1$ perché è $7^1 = 7$.
4. $\log_7(-7) = ?$ non esiste perché $b = -7$ non è positivo.
5. $\log_1 7$ non ha significato perché, secondo la definizione, la base deve essere diversa da 1. Infatti l'equazione $1^x = b$ è impossibile (se $b \neq 1$), indeterminata (se $b = 1$), inoltre la potenza a^x è definita per $a \geq 0$; l'equazione $0^x = b$, come sappiamo è impossibile se $b \neq 0$ reale ed indeterminata se $b = 0$.
6. $\log_{(-3)} 7$ e $\log_0 7$ non hanno significato perché, secondo la definizione, la base deve essere positiva (i logaritmi di numeri negativi sono numeri immaginari).

PROPRIETÀ GENERALI

1. Il $\log_a b$ è positivo se:

$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$$

2. Il $\log_a b$ è negativo se:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$$

3. $\log_a a = 1$ perché è $a^1 = a$.
4. $\log_a 1 = 0$ perché è $a^0 = 1$.
5. Se due numeri sono eguali, anche i loro logaritmi (rispetto alla stessa base) sono eguali; e viceversa.
6. Se la base *a* è maggiore di 1, al crescere del numero *b*, cresce anche il logaritmo di questo.
7. Se la base *a* è minore di 1, al crescere del numero *b*, il logaritmo decresce.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL LOGARITMO

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^n) = n\log_a x$
4. $\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n}\log_a b$

Queste proprietà trasformano le quattro operazioni di moltiplicazione, di divisione, di elevazione a potenza di esponente n e di estrazione di radice di indice n sopra numeri positivi assegnati, rispettivamente, nelle operazioni di addizione, di sottrazione, moltiplicazione per n e divisione per n sopra i logaritmi dei numeri assegnati.
Si tenga presente che per poter applicare le proprietà 1 e 2 i singoli numeri x e y, dei quali si considerano i logaritmi, devono essere positivi, e non soltanto deve essere positivo il loro prodotto xy o il loro quoziente x/y.

Osservazione: Non vi sono, invece, regole analoghe riguardo alla somma e alla differenza: il logaritmo di una somma o di una differenza non è esprimibile mediante i logaritmi dei suoi singoli termini.

Siccome esistono infiniti sistemi di logaritmi (poiché infinite sono le possibili basi $a > 1$), per passare da una base a ad un'altra b basta applicare la seguente formula:

$$\log_b N = \frac{\log_a B}{\log_a b}$$

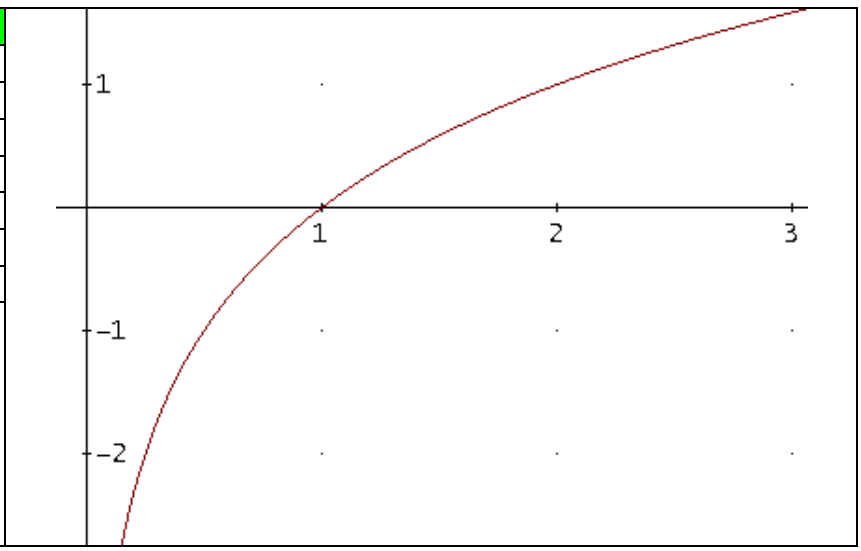
GRAFICO DEL LOGARITMO

Vogliamo studiare il comportamento della relazione di dipendenza $y = \log_a x$ al variare di $a \in \mathbb{R}^+$.
Per fare ciò distinguiamo i due seguenti casi.

I CASO: $a > 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = 2$.

x	y
1	0
0,5	-1
0,25	-2
2	1
3	1,58496
4	2
5	2,32193
6	2,58496



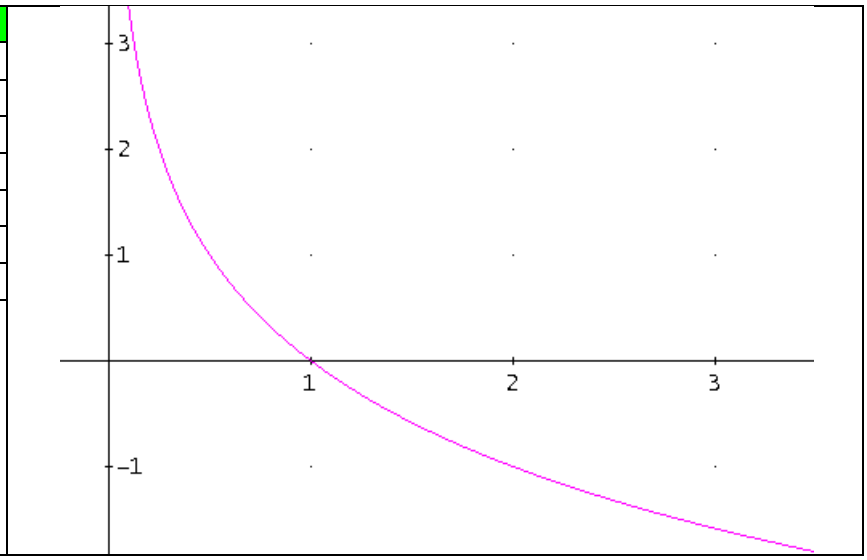
Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- i valori di x che ammettono un corrispondente sono solo $x \in]0, +\infty[$;
- i valori della y sono positivi per $x > 1$ e negativi per $0 < x < 1$;
- vale la proprietà di crescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$.

II CASO: $0 < a < 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = \frac{1}{2}$.

x	y
1	0
0,5	1
0,25	2
2	-1
3	-1,585
4	-2
5	-2,3219
6	-2,585



Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- i valori di x che ammettono un corrispondente sono solo $x \in]0, +\infty[$;
- i valori della y sono negativi per $x > 1$ e positivi per $0 < x < 1$;
- vale la proprietà di decrescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad \log_a x_1 > \log_a x_2$.

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Definizione: Si definisce ***equazione esponenziale*** ogni equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una o più potenze.

Il caso più semplice di equazione esponenziale è l'equazione esponenziale ***elementare***:

$$a^x = b$$

con $a > 0$.

Osservazione: Nell'insieme dei numeri reali l'equazione $a^x = b$ può avere soluzioni solo se $a > 0$ e $b > 0$ (se $a = 0$, allora $0^x = 0$ per ogni $x > 0$ e quindi l'equazione $0^x = b$ è impossibile se $b \neq 0$ e indeterminata se $b = 0$); infatti:

1. il primo membro di $a^x = b$ ha significato solo se a è positivo;
2. inoltre a^x risulta sempre positivo per qualsiasi valore di x pertanto l'equazione può avere soluzioni soltanto se anche b è positivo.

EQUAZIONI ESPONENZIALI RIDUCIBILI AD UGUAGLIANZE DI DUE POTENZE AVENTI LA STESSA BASE

La risoluzione di tali equazioni è semplice in quanto si passa dall'uguaglianza di due potenze all'uguaglianza dei loro esponenti, cioè:

$$a^x = a^y \qquad \rightarrow \qquad x = y$$

Esempi:

1. Per risolvere l'equazione esponenziale $3^{2x} = \frac{1}{81}$, basta riscrivere l'equazione come $3^{2x} = 3^{-4}$ e porre $2x = -4 \quad \rightarrow \quad x = -2$.
2. Per risolvere l'equazione esponenziale $\frac{2^{x^2}}{32^x} - 64 = 0$, basta riscrivere l'equazione come $2^{x^2-5x} = 2^6$ e porre $x^2 - 5x = 6$, da cui si ricava che $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

EQUAZIONI ESPONENZIALI RIDUCIBILI AD EQUAZIONI ALGEBRICHE MEDIANTE L'USO DI UN'INCOGNITA SUPPLEMENTARE

Esempio:

Risolvere l'equazione esponenziale $16 - 10 \cdot 2^x + 2^{2x} = 0$.

Poniamo $2^x = z$ e otteniamo:

$$z^2 - 10z + 16 = 0$$

le cui soluzioni sono $z_1 = 2$ e $z_2 = 8$. Quindi:

- $2^x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1;$
- $2^x = 2^3 \quad \rightarrow \quad x = 3.$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

<u>Definizione</u>: Si dice ***equazione logaritmica*** un'equazione in cui compare il logaritmo dell'incognita o il logaritmo di un'espressione contenente l'incognita.

Nella risoluzione di un'equazione logaritmica si cerca, mediante l'uso delle proprietà dei logaritmi, di ricondurre tutto alla forma:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni algebriche contenenti l'incognita x.
Dall'uguaglianza precedente segue che i valori della x che la verificano, devono verificare anche l'equazione $A(x) = B(x)$.

Osservazione: **Attenzione**! Non vale il viceversa, cioè le soluzioni dell'equazione $A(x)=B(x)$ può non essere soluzione dell'equazione $\log_a A(x)=\log_a B(x)$.

Per risolvere tali equazioni si pone, quindi, $A(x)=B(x)$ e si vede se le soluzioni trovate soddisfano l'equazione di partenza.

Esempi:

1. Risolvere l'equazione $\log(2x-1)=\log(x+3)$.

   Imponendo la condizione di esistenza dei logaritmi si deve avere:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

   cioè $x>\frac{1}{2}$. Uguagliando gli argomenti si ha:

$$2x-1=x+3 \quad \rightarrow \quad x=4$$

   che è una soluzione accettabile in quanto $4>\frac{1}{2}$.

2. Risolvere l'equazione $\log(x^2-6)=\log(5x+8)$.

   Uguagliando gli argomenti si ha:

$$x^2-6=2x+8 \quad \rightarrow \quad x^2-5x-14=0 \quad \rightarrow \quad x_1=7,\ x_2=-2$$

   La soluzione $x=7$ è l'unica accettabile in quanto per $x=-2$ i due logaritmi perdono di significato.

3. Risolvere l'equazione $15^x=7$.

   Passando ai logaritmi si ha:

$$\log 15^x=\log 7 \quad \rightarrow \quad x\cdot\log 15=\log 7 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\log 7}{\log 15}$$

Definizione: Una disequazione si dice ***esponenziale*** se in essa l'incognita, o qualche espressione contenente l'incognita, compare come esponente di una o più potenze.

Prima di passare ai metodi di risoluzione di tali disequazioni, ricordiamo alcuni risultati già discussi in precedenza.

ESPONENZIALI

$a>0$	a^x è un numero reale positivo $\forall x \in \mathbb{R}$		
$a>1$	$a^x > a^y$	$\rightarrow$	$x>y$
	$a^x < a^y$	$\rightarrow$	$x<y$
$0<a<1$	$a^x > a^y$	$\rightarrow$	$x<y$
	$a^x < a^y$	$\rightarrow$	$x>y$

LOGARITMI

$a>1$	$x>y$	$\rightarrow$	$\log_a x > \log_a y$
	$x<y$	$\rightarrow$	$\log_a x < \log_a y$
$0<a<1$	$x>y$	$\rightarrow$	$\log_a x < \log_a y$
	$x<y$	$\rightarrow$	$\log_a x > \log_a y$

DISEQUAZIONI RIDUCIBILI A DISUGUAGLIANZE DI DUE POTENZE DI UGUAL BASE

Sono delle disequazioni che si presentano in una delle forme:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

In questo caso si ha:

$a>1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)>g(x)$
	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)<g(x)$
$0<a<1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)<g(x)$
	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)>g(x)$

Esempi:

1. Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

   In base alla precedente tabella è facile notare che ci si trova nel caso in cui $0<a<1$ e quindi si ha che $x>3$.

2. Risolvere la disequazione $\pi^x < \pi^7$
   In base alla precedente tabella è facile notare che ci si trova nel caso in cui $a>1$ e quindi si ha che $x<7$.

DISEQUAZIONI RISOLUBILI CON L'UTILIZZO DI UN'INCOGNITA AUSILIARIA

Esempio: Risolvere la disequazione esponenziale

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 > 0$$

Riscriviamo come segue la disequazione:

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0$$

e poniamo $2^x = z$, ottenendo così:

$$z^2 - 6z + 8 > 0$$

Le soluzioni di questa disequazione sono:

$$t < 2 \vee t > 4$$

e quindi si ha:

- $2^x < 2 \quad \rightarrow \quad x < 1;$
- $2^x > 4 \quad \rightarrow \quad x > 2.$

DISEQUAZIONI RISOLUBILI CON L'UTILIZZO DEI LOGARITMI

Per risolverle basta applicare ad ambo i membri della disequazione:

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} < b^{g(x)}$$

i logaritmi, facendo attenzione alla base del logaritmo considerato. Infatti si hanno i due casi:

<u>1° caso</u>: $c > 1$

- $a^{f(x)} < b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a < g(x) \cdot \log_c b$
- $a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a > g(x) \cdot \log_c b$

<u>2° caso</u>: $0 < c < 1$

- $a^{f(x)} < b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a > g(x) \cdot \log_c b$
- $a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a < g(x) \cdot \log_c b$

Esempi:

1. $3^x > \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x \cdot \log_3 3 > \log_3 \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x > -2$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \quad \rightarrow \quad x \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{2}} 8 \quad \rightarrow \quad x < -3$

Definizione: Una disequazione si dice ***logaritmica*** se in essa compare o il logaritmo dell'incognita, o il logaritmo di un'espressione contenente l'incognita.

DISEQUAZIONI DELLA FORMA:	$\log_a A(x) < b$	$\log_a A(x) > b$

Per risolvere tali disequazioni è necessario considerare i seguenti casi.

I caso: $a > 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < a^b \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) > a^b \end{cases}$$

II caso: $0 < a < 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) > a^b \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < a^b \end{cases}$$

Esempio:

La disequazione $\log_{10}\left(2x^2 - 7x + 103\right) > 2$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 103 > 0 \\ 2x^2 - 7x + 103 > 10^2 = 100 \end{cases}$$

DISEQUAZIONI DELLA FORMA:	$\log_a A(x) < \log_a B(x)$	$\log_a A(x) > \log_a B(x)$

Per risolvere tali disequazioni è necessario considerare i seguenti casi.

I caso: $a > 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$$

<u>II caso</u>: $0 < a < 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

Esempio:

La disequazione $\log_3(3x+1) \geq \log_3(2-x)$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 2-x > 0 \\ 3x+1 \geq 2-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1/3 \\ x < 2 \\ x \geq 1/4 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4} \leq x < 2$$

TRIGONOMETRIA

RADIANTI E CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definizione: Si dice ***angolo*** ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine.

Definizione: Dicesi ***arco*** (di circonferenza) l'intersezione tra una circonferenza e un angolo al centro della circonferenza stessa.

Definizione: Si definisce ***grado*** la 360ª parte dell'angolo giro.

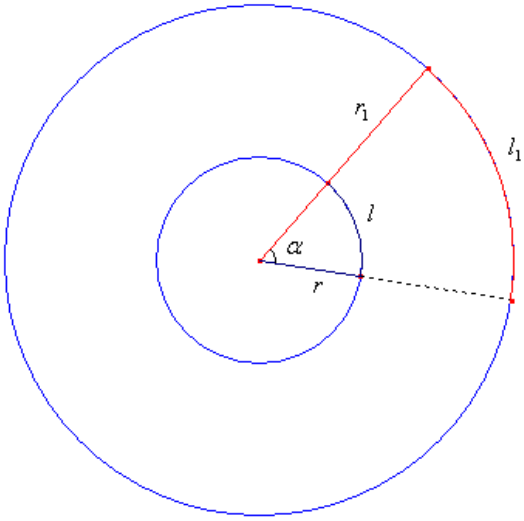
MISURA IN RADIANTI

Consideriamo un angolo α al centro di due circonferenze C e C_1 di raggi r e r_1. Detti l e l_1 gli archi corrispondenti, si ha che:

$$l : l_1 = r : r_1$$

Cioè: *date due circonferenze, due archi che sottendono angoli al centro "uguali", sono proporzionali ai rispettivi raggi.*

Se le circonferenze sono concentriche si ha che: *se un angolo al centro di una circonferenza corrisponde ad un arco lungo quanto il raggio, allora lo stesso angolo corrisponde, su qualsiasi altra circonferenza concentrica alla prima, ad un arco lungo quanto il raggio.*



Definizione: Si definisce ***radiante*** l'angolo al centro di una circonferenza che corrisponde ad un arco di lunghezza uguale al raggio.

Se g è la misura in gradi di un angolo e α la misura in radianti dello stesso angolo, si ha:

$$360° : 2\pi = g : \alpha$$

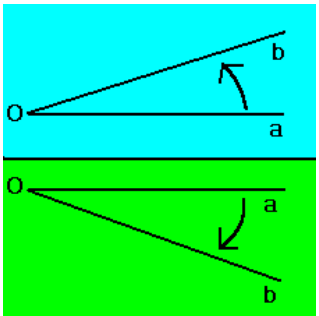
cioè:

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot g$$

$$g = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha$$

GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Definizione: Si definisce ***angolo orientato*** un angolo pensato come l'insieme di tutte le sue semirette uscenti dal vertice, che siano state ordinate secondo uno dei due versi possibili.

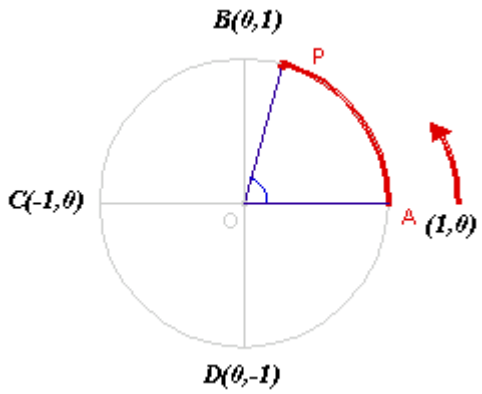


Definizioni: Un angolo orientato $\widehat{ab}$ di centro O si dice ***orientato positivamente*** quando il lato a deve ruotare in senso antiorario intorno ad O per sovrapporsi a b. Si dice ***orientato negativamente*** se la stessa rotazione avviene in senso orario.

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definizione: Una circonferenza si dice ***orientata*** quando su di essa è fissato un verso di percorrenza.

Definizione: Una ***circonferenza goniometrica*** è una circonferenza che ha centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio unitario.



Si assume che il punto A sia l'origine degli archi, e che il lato OA sia l'origine degli archi. Inoltre si considera come positivo il verso antiorario. Quando il punto P, partendo da A, percorre interamente la circonferenza, gli archi$\widehat{AA}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AA}$ sono rispettivamente 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, in radianti: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π.

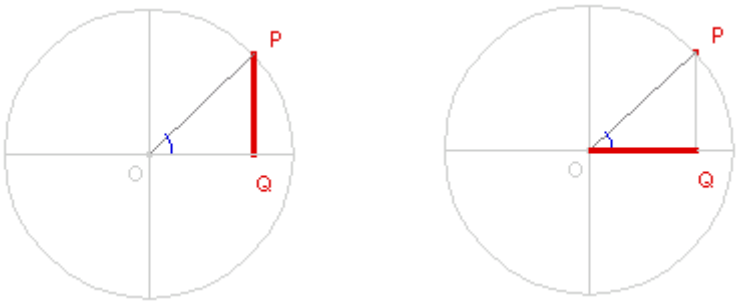
Consideriamo un punto P sulla circonferenza e sia $\widehat{AP}$ l'arco di origine A e di estremo P. Sia α la misura in gradi di $\widehat{AP}$. L'ordinata e l'ascissa di P sono funzioni dell'angolo α, cioè ad ogni valore di α corrisponde un determinato valore sia per l'ordinata che per l'ascissa del punto.

Definizioni: Dicesi ***seno*** di un arco sulla circonferenza goniometrica, l'ordinata dell'estremo dell'arco, cioè:

$$\sin\alpha = PQ$$

Dicesi ***coseno*** di un arco sulla circonferenza goniometrica, l'ascissa dell'estremo dell'arco, cioè:

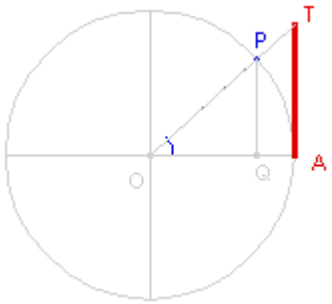
$$\cos\alpha = OQ$$



Si tracci ora la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A e sia T il suo punto d'intersezione con il prolungamento del segmento OP. L'ordinata del punto T è una funzione dell'angolo α.

Definizione: Dicesi ***tangente*** di un arco sulla circonferenza goniometrica l'ordinata del punto d'intersezione fra la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di origine degli archi e il prolungamento del segmento che unisce il centro della circonferenza con l'estremo dell'arco, cioè:

$$\tan\alpha = AT$$



Dalla proporzione $OA : OT = OQ : OP$ segue che:

$$1 : \tan\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha$$

da cui:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Le funzioni $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ prendono il nome di ***funzioni circolari*** o ***funzioni goniometriche*** o ***funzioni trigonometriche***.

	$0 < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$	**Positivo**	**Positivo**	**Negativo**	**Negativo**
$\cos\alpha$	**Positivo**	**Negativo**	**Negativo**	**Positivo**
$\tan\alpha$	**Positiva**	**Negativa**	**Positiva**	**Negativa**

Consideriamo il triangolo APQ, per il teorema di Pitagora si ha:

$$OQ^2 + PQ^2 = OP^2 = 1.$$

Poiché $OQ = \cos\alpha$ e $PQ = \sin\alpha$, si ottiene:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

che prende il nome di ***relazione fondamentale della goniometria***.

Da questa relazione segue che:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Inoltre la tangente dell'angolo α, come visto, risulta:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Si definisce ***cotangente*** dell'angolo α il reciproco della funzione tangente:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ sono funzioni ***periodiche*** di periodo 360°, cioè:

$$\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha$$

mentre le funzione $\tan\alpha$ e $\cot\alpha$ hanno periodo 180°, cioè:

$$\tan(\alpha + k\cdot 180°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + k\cdot 180°) = \cot\alpha$$

Nella seguente tabella sono riportati i valori delle funzioni goniometriche di particolari angoli.

	0°	***90°***	***180°***	***270°***	***360°***
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	0	∞	0	∞

Osservazioni:

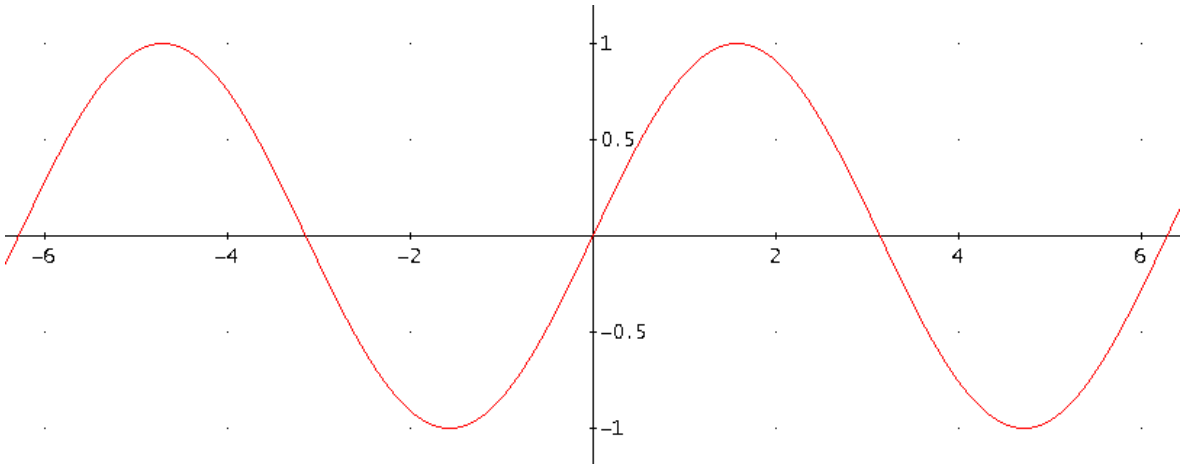
1. La funzione seno e la funzione coseno sono limitate al variare dell'angolo, cioè i loro valori sono sempre interni all'intervallo $[-1,1]$.
2. Le funzioni tangente e cotangente sono illimitate al variare dell'angolo, di conseguenza i loro valori variano in $\mathbb{R}$.

PARTICOLARI VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Gradi	***Radianti***	***seno***	***coseno***	***tangente***	***cotangente***
0°	0	0	1	0	*non è definita*
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*non è definita*	0
180°	π	0	-1	0	*non è definita*
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	*non è definita*	0
360°	2π	0	1	0	*non è definita*

GRAFICO DI $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	1



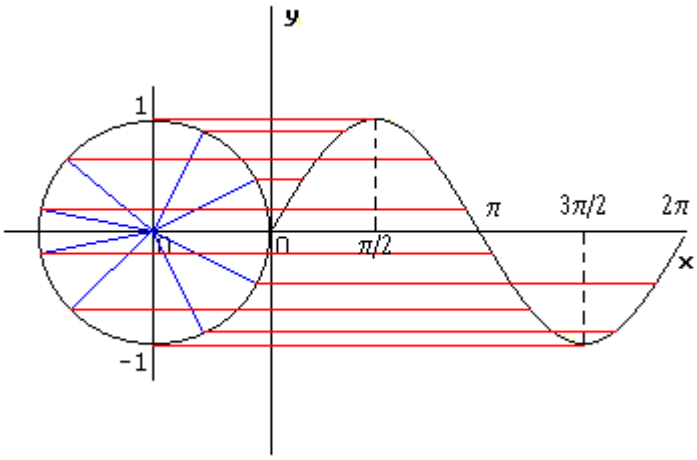
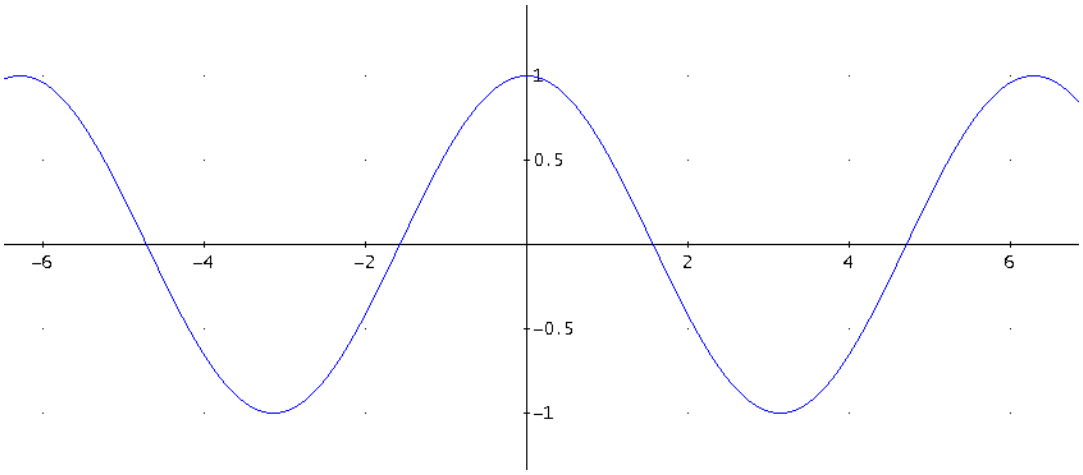


GRAFICO DI $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



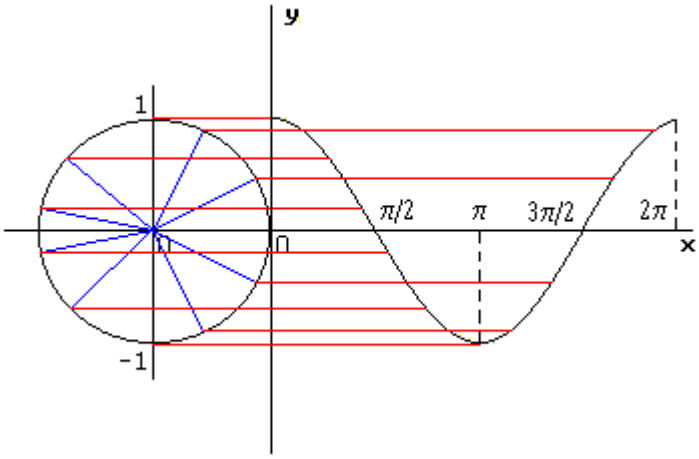


GRAFICO DI $y = \tan x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

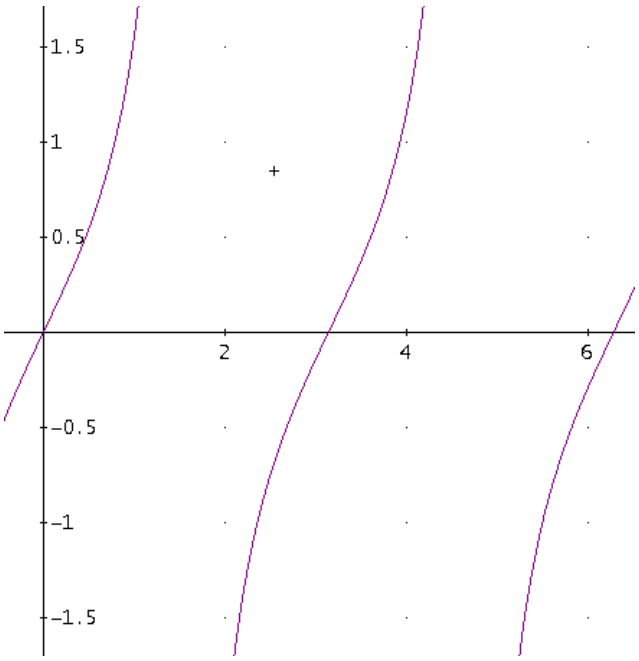
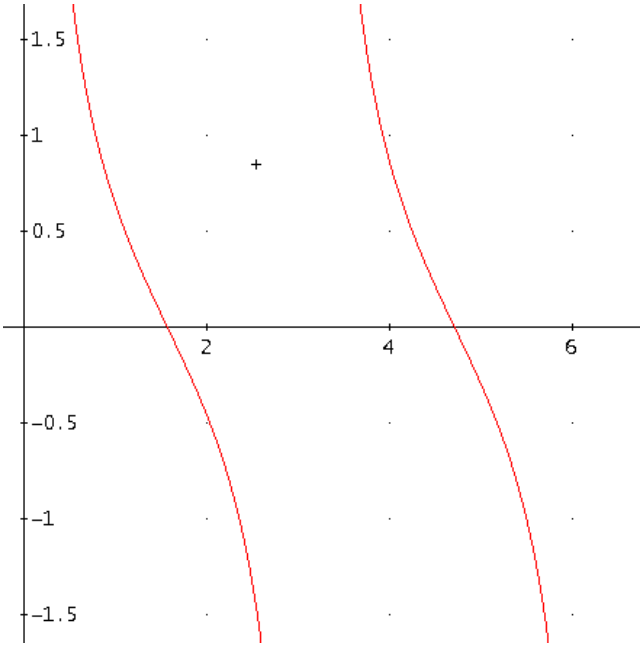


GRAFICO DI $y = \cot x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞



RELAZIONI GONIOMETRICHE

ESPRESSIONI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE PER MEZZO DI UNA DI ESSE

Da \ ***Si ha***	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\tan\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI OPPOSTI

Due archi si dicono ***opposti*** se sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI ESPLEMENTARI

Due archi si dicono ***esplementari*** se la loro somma è un angolo giro.

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(360° - \alpha) = -\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SUPPLEMENTARI

Due archi si dicono ***supplementari*** se la loro somma è un angolo piatto.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI CHE DIFFERISCONO DI 180°

Due archi differiscono di 180° se uno è α e l'altro è $180° + \alpha$.

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(180° + \alpha) = \cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI CHE DIFFERISCONO DI 90°

Due archi differiscono di 180° se uno è α e l'altro è $90° + \alpha$.

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(90° + \alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cot(90° + \alpha) = -\tan\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI COMPLEMENTARI

Due archi si dicono ***complementari*** se la loro somma è un angolo retto.

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Servono a calcolare le funzioni circolari di angoli che si possono pensare come differenza o come somma di archi notevoli.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

Servono a trasformare in prodotto la differenza e la somma di seni e coseni.

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER

Servono a trasformare il prodotto di seni, di coseni e di un seno e di un coseno nella somma o nella differenza:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

<u>Definizione</u>: Le ***equazioni goniometriche*** sono delle equazioni del tipo:

$$f(x) = 0$$

con $f(x)$ funzione goniometrica.

EQUAZIONI IN SENO

Sono equazioni del tipo $\sin x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x = \alpha + 2k\pi \qquad\qquad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il più piccolo angolo positivo il cui seno è $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{\pi}{4}$ e quindi si ha:

- $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
- $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

EQUAZIONI IN COSENO

Sono equazioni del tipo $\cos x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x = \pm\alpha + 2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il più piccolo angolo positivo il cui coseno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\frac{\pi}{6}$ e quindi si ha:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

EQUAZIONI IN TANGENTE

Sono equazioni del tipo $\tan x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x = \alpha + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\tan x = 1$

Il più piccolo angolo positivo la cui tangente è 1 è $\frac{\pi}{4}$ e quindi si ha:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

EQUAZIONI IN COTANGENTE

Sono equazioni del tipo $\cot x = a$ e ammettono le soluzioni:

$$x = \alpha + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio: Risolvere l'equazione $\cot x = \sqrt{3}$

Il più piccolo angolo positivo la cui tangente è $\sqrt{3}$ è $\frac{\pi}{6}$ e quindi si ha:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

EQUAZIONI RICONDUCIBILI AD EQUAZIONI ELEMENTARI

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

L'uguaglianza si realizza nei casi seguenti:

- $2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
- $2x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \quad 3x = 3\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}$

EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

<u>Definizione</u>: Si dice ***equazione lineare in seno e coseno*** un'equazione del tipo:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per risolvere tali equazioni esistono diversi modi, uno di questi è quello di utilizzare le seguenti formule parametriche che esprimono le funzioni goniometriche di un angolo in funzione della tangente dell'angolo metà.

FORMULE PARAMETRICHE

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Utilizzando le formule parametriche, in cui si pone $t = \tan\frac{x}{2}$, otteniamo:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \quad \rightarrow \quad 2t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 = 2 + 2t^2 \quad \rightarrow \quad \left(2+\sqrt{3}\right)t^2 - 2t + 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \tan\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

Definizione: Si dice ***equazione omogenea in seno e coseno*** un'equazione del tipo:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per risolvere tali equazioni distinguiamo diversi casi.

I CASO: $a, b, c \neq 0$

È possibile supporre $\cos x \neq 0$, in quanto $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, per $a \neq 0$ non è soluzione dell'equazione.

Dividendo tutto per $\cos x$ otteniamo:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

che è un'equazione facilmente risolubile.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sin^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

Dividiamo tutto per $\cos^2 x$ si ottiene:

$$\tan^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1+3+2\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 1+3-2\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)^2$$

$$\tan x = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pm\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} \quad \rightarrow \quad \tan x_1 = 1;\ \tan x_2 = \sqrt{3}$$

Da queste equazioni segue che:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

II CASO: $a = 0 \wedge b, c \neq 0$ OPPURE $a, b \neq 0 \wedge c = 0$

In questo caso si hanno le due equazioni:

$$b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0$$

che diventano:

$$\cos x\left(b\sin x + c\cos x\right) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sin x\left(a\sin x + b\cos x\right) = 0$$

In questo modo ci si riconduce a due equazioni: una elementare e una lineare in seno e coseno.

Esempio: Risolvere l'equazione $\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0$.

Mettendo in evidenza $\cos x$ si ottiene:

$$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0$$

ovvero:

- $\cos x=0 \;\rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+k\pi$;
- $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0 \;\rightarrow\; \sqrt{3}\tan x-1=0 \;\rightarrow\; \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; x=\frac{\pi}{6}+k\pi$.

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Definizione: Le ***disequazioni goniometriche*** sono delle disequazioni del tipo:

$$f(x)>0 \qquad f(x)<0 \qquad f(x)\geq 0 \qquad f(x)\leq 0$$

con $f(x)$ funzione goniometrica.

DISEQUAZIONI ELEMENTARI

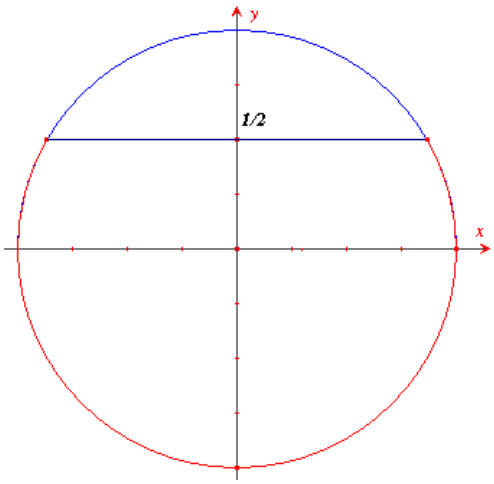
Sono delle disequazioni del tipo:

$$\sin x>a \qquad \cos x>b \qquad \tan x>c \qquad etc.$$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sin x<\frac{1}{2}$.

Dalla rappresentazione riportata sotto è facile dedurre che deve essere:

$$2k\pi\leq x<\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \frac{5}{6}\pi+2k\pi<x\leq 2\pi+2k\pi$$



DISEQUAZIONI RICONDUCIBILI A DISEQUAZIONI ELEMENTARI

Sono equazioni del tipo:

$$\sin(ax+b)>c \qquad etc.$$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Con un ragionamento analogo a quello del precedente esempio si ottiene:

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<3x-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi+2k\pi \;\rightarrow\; \frac{\pi}{2}+2k\pi<3x<\pi+2k\pi \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}$$

DISEQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO: $a\sin x+b\cos x+c>0$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{3}>0$.

Basta utilizzare le formule parametriche per ottenere:

$$\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\sqrt{3}>0 \;\rightarrow\; \left(\sqrt{3}+1\right)t^2-2\sqrt{3}t+\sqrt{3}-1<0$$

$$t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}+1}=\begin{cases}t_1=1\\ t_2=2-\sqrt{3}\end{cases}$$

Essendo il verso della disequazione discorde con il coefficiente del termine di grado massimo, la disequazione è soddisfatta per tutti i valori dell'incognita interni all'intervallo delle radici, cioè:

$$2-\sqrt{3}<\tan\frac{x}{2}<1 \;\rightarrow\; \frac{\pi}{12}+k\pi<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

DISEQUAZIONI OMOGENEE DI II GRADO IN SENO E COSENO: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x>0$

Esempio: Risolvere la disequazione $\sqrt{3}\sin^2 x-3\sin x\cos x<0$.

Poiché per $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ la disequazione non è soddisfatta[1], dividendo tutto per $\cos^2 x$ si ottiene:

$$\sqrt{3}\tan^2 x-3\tan x<0$$

da cui:

$$0<\tan x<\sqrt{3}$$

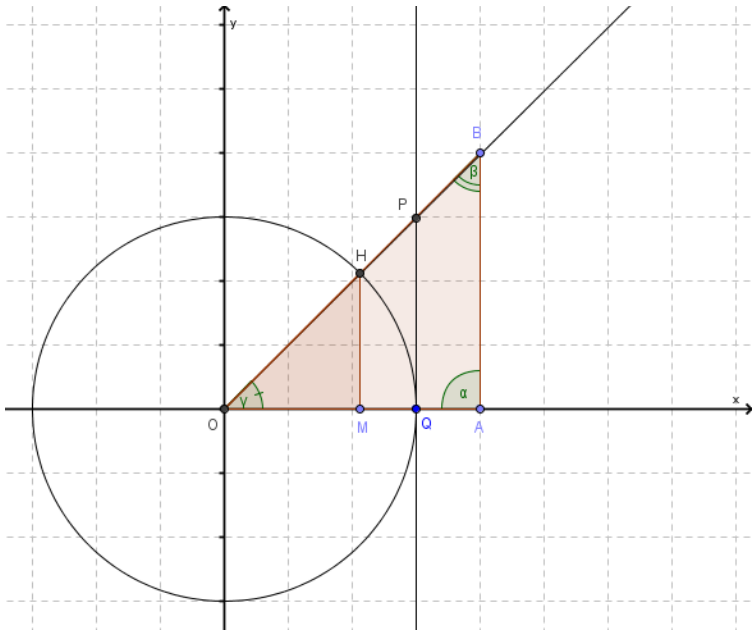
[1] Infatti $\sqrt{3}\cdot1-0>0$

Quindi le soluzioni sono:

$$k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy e una circonferenza goniometrica; sia inoltre PQ la tangente geometrica passante per il punto $Q(1;0)$ e parallela all'asse delle ordinate. Sia OAB un qualsiasi triangolo rettangolo avente uno dei vertici coincidente con l'origine del sistema di riferimento cartesiano e un cateto giacente sull'asse delle ascisse.



Si dimostra facilmente che i triangoli rettangoli AOB e OHM sono simili e, di conseguenza, i loro lati sono in proporzione, cioè:

$$\frac{OB}{OH} = \frac{OA}{OM} = \frac{BA}{HM}$$

Considerando i primi due membri di questa relazione e sostituendo in essa i valori, secondo la classica notazione dei triangoli rettangoli, si ha:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\cos\gamma}$$

da cui:

$$b = a \cdot \cos\gamma$$

Considerando invece il primo e il terzo membro della stessa relazione e sostituendo in essa i valori, secondo la classica notazione dei triangoli rettangoli, si ottiene:

$$\frac{a}{1} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

da cui:

$$c = a \cdot \sin\gamma$$

In generale si ha il seguente:

Primo teorema dei triangoli rettangoli: *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo ad esso adiacente; ovvero un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto.*

In riferimento alla precedente figura, si considerino i triangoli simili *OPQ* e *OPA*, si ha:

$$\frac{OA}{BA} = \frac{OQ}{PQ}$$

Sostituendo in tale relazione i valori, secondo la classica notazione dei triangoli rettangoli, si ha:

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\tan\gamma}$$

e quindi:

$$c = b \cdot \tan\gamma$$

Essendo $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, per le formule degli archi associati si avrà:

$$c = b \cdot \tan\gamma = b \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = b \cdot \cot\beta$$

In generale si ha il seguente:

Secondo teorema dei triangoli rettangoli: *In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo ad esso opposto; ovvero un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo ad esso adiacente.*