Successioni

Assiomi di Peano (1858-1932)

1. Esiste un numero $0 \in \mathbb{N}$;
2. Ogni numero naturale ammette un successore;
3. 0 non è successore di nessun numero naturale;
4. Numeri diversi ammettono successori diversi;
5. Ogni insieme di numeri naturali contenente lo zero e il successore di ogni suo elemento coincide con tutto l'insieme dei numeri naturali (principio d'induzione matematica).

In maniera formale scriveremo:

(P1) Esiste un numero $0 \in \mathbb{N}$;
(P2) Esiste una funzione $S: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, detta "*successore*";
(P3) Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $S(x) \neq 0$;
(P4) Se $x \neq y$ allora $S(x) \neq S(y)$;
(P5) Se X è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che:

- $0 \in X$
- $x \in X \quad \Longrightarrow \quad S(x) \in X$

allora $X = \mathbb{N}$.

Successioni numeriche

- **Definizione**
- **Rappresentazione per enumerazione**
- **Rappresentazione mediante espressione analitica**
- **Espressione ricorsiva**
- **Successioni monotone**

$$3, 5, 7, \dots$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

cresc.

$$\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n < a_{n+1}$$

$$\begin{cases} F_0 = 1, \ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

$$F_2 = F_0 + F_1 = 2$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$$

Sommatorie

$$\sum_{i=0}^{3} i = 0+1+2+3 = 6$$

$$\sum_{i=0}^{4} i^2 = 0+1+4+9+16$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \underline{a_1} + \underbrace{a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \underline{a_1} + \sum_{i=\underline{2}}^{n} a_i \qquad \underline{a_{n-2}} + \underbrace{a_{n-1} + a_n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\underline{n-2}} + a_{n-1} + a_n$$

Esempio

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Base: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} a^i = \frac{1-a}{1-a}$$

$$1 = 1$$

Supposta la proprietà vera per n dimostriamo che è vera per n+1

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} =$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-\cancel{a^{n+1}}+\cancel{a^{n+1}}-a^{n+2}}{1-a}$$

$$a^{n+1} \cdot a^1 = a^{n+1+1}$$

Esempio

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

BASE: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(\cancel{2})}{\cancel{2}} \qquad 1 = 1$$

Supp. vera per n dim. per $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} i}} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \underline{n+1} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \underline{\underline{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}$$

Il principio di induzione matematica: formalizzazione

Se una proprietà $P(n)$ dipendente da un numero naturale n vale per $n = 0$ e se per ogni numero naturale n, dalla validità di $P(n)$ segue la validità di $P(n+1)$, allora P vale su tutti i numeri naturali.

L'induzione da Zenone a Peano

Un granello di sabbia che cade non fa rumore, quindi nemmeno due, e nemmeno tre, e così via. Quindi nemmeno un mucchio di sabbia che cade fa rumore.
(Paradosso del sorite di Zenone di Elea)

E' un esempio di ragionamento per induzione:
1) un granello di sabbia che cade non fa rumore (base dell'induzione);
2) se n granelli di sabbia che cadono non fanno rumore (ipotesi induttiva), allora anche n+1 granelli di sabbia che cadono non fanno rumore;
3) possiamo concludere che un qualsiasi numero di granelli di sabbia che cade non fa rumore.

Francesco Maurolico (Messina 1494-1575)
Fu il primo a utilizzare consciamente il principio di induzione nella sua opera Arithmeticorum libri duo (1575)

<Propositio> 15a
83 Ex aggregatione imparium numerorum ab unitate per ordinem successive sumptorum, construuntur quadrati numeri continuati ab unitate, ipsisque imparibus collaterales.
Nam per antepraemissam , unitas imprimis cum impari sequente facit quadratum sequentem scilicet 4.
84 Et ipse 4 quadratus secundus , cum impari tertio scilicet 5 facit quadratum tertium, scilicet 9. Itemque 9 quadratus tertius cum impari quarto scilicet 7 facit quadratum quartum, scilicet 16 et sic deinceps in infinitum, semper decima tertia repetita, propositum demonstratur.

$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Blaise Pascal (1623-1662)
Formulò per primo, in maniera esplicita, il principio di induzione.

Giuseppe Peano (1858-1932)
Nel 1894 inquadrò il principio di induzione in un sistema di assiomi.