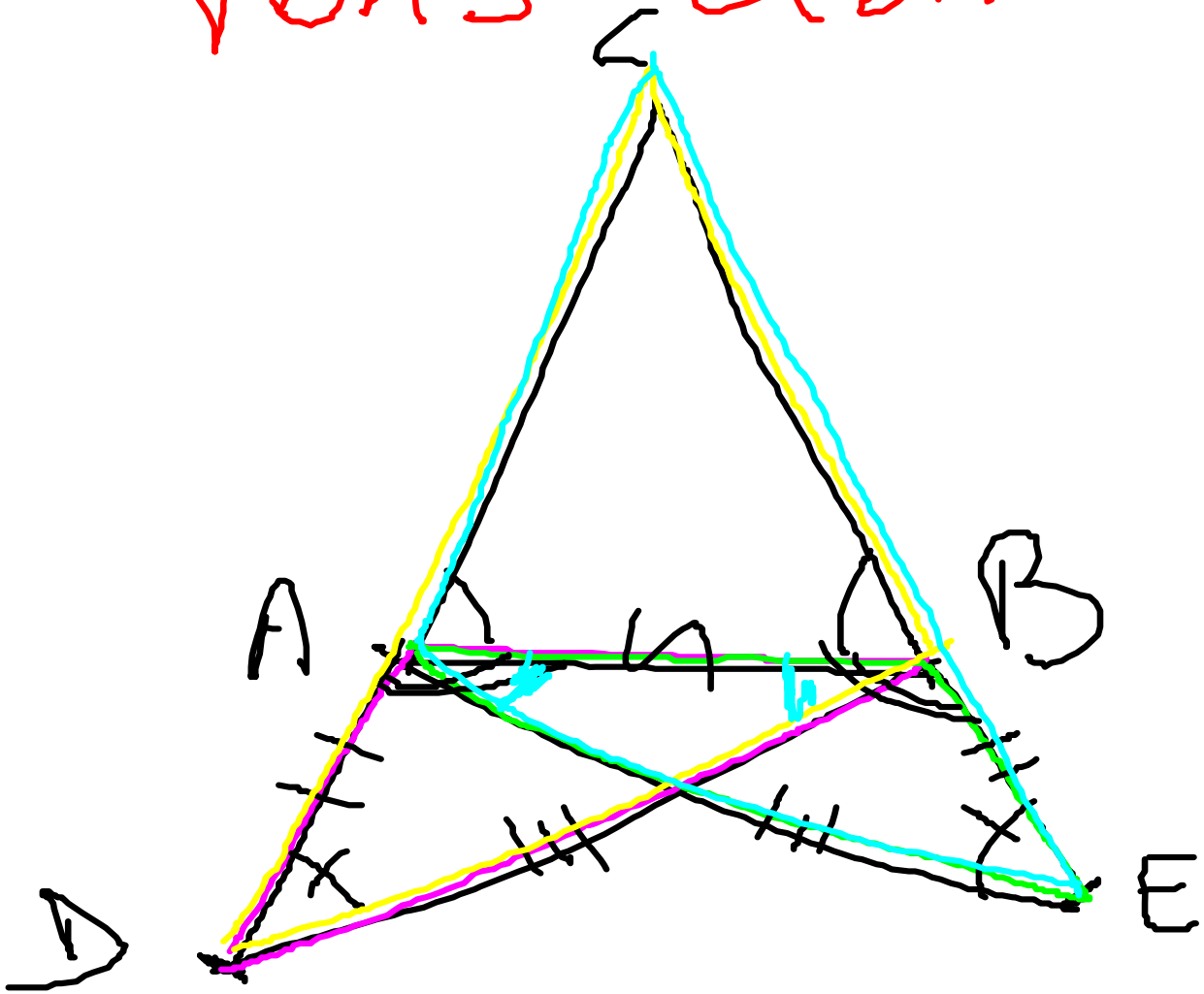
Pons asinorum



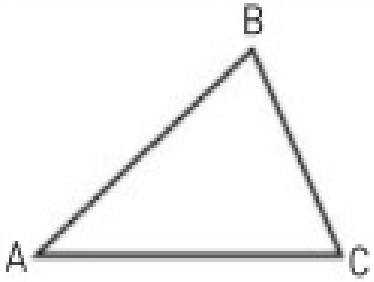
Hp) $\hat{A} \cong \hat{B}$

Th) $AC \cong CB$

Lato maggiore e angolo maggiore

TEOREMA

Lato maggiore → angolo opposto maggiore
In un triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.

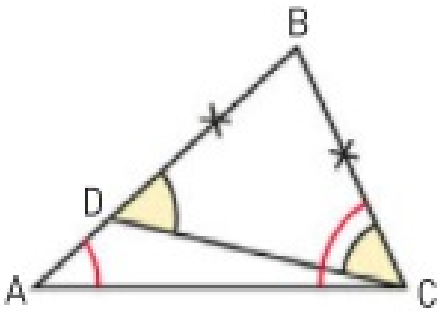


Ipotesi: ABC triangolo
AB > BC

Tesi: $\hat{C} > \hat{A}$

DIMOSTRAZIONE

ANIMAZIONE Per ipotesi $AB > BC$, quindi possiamo considerare un punto D del segmento AB in modo che $BD \cong BC$.



$B\widehat{C}A > B\widehat{C}D$ perché $B\widehat{C}D$ è interno a $B\widehat{C}A$.
$B\widehat{C}D \cong C\widehat{D}B$ perché il triangolo DBC è isoscele.
$C\widehat{D}B > D\widehat{A}C$ perché $C\widehat{D}B$ è angolo esterno del triangolo ADC e $D\widehat{A}C$ è un angolo interno non adiacente.
Abbiamo dimostrato che:
$B\widehat{C}A > B\widehat{C}D \cong C\widehat{D}B > D\widehat{A}C$, quindi
$B\widehat{C}A > D\widehat{A}C$, cioè $\widehat{C} > \widehat{A}$ nel triangolo ABC.

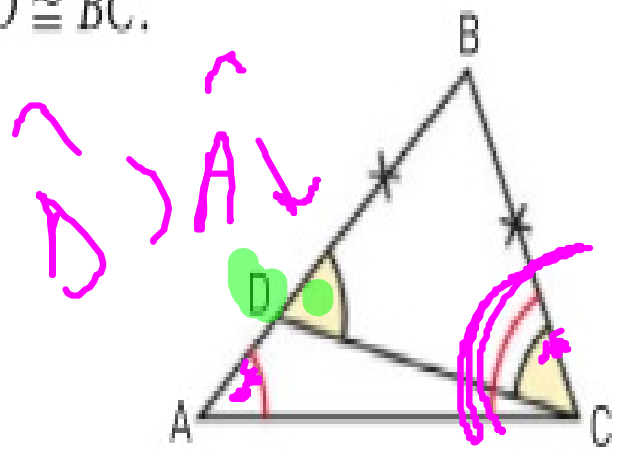
Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA

Angolo maggiore → lato opposto maggiore
In un triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore.

DIMOSTRAZIONE

ANIMAZIONE Per ipotesi $AB > BC$, quindi possiamo considerare un punto D del segmento AB in modo che $BD \cong BC$.



$\widehat{BCA} > \widehat{BCD}$ perché $\widehat{BCD}$ è interno a $\widehat{BCA}$.

$\widehat{BCD} \cong \widehat{CDB}$ perché il triangolo DBC è isoscele.

$\widehat{CDB} > \widehat{DAC}$ perché $\widehat{CDB}$ è angolo esterno del triangolo ADC e $\widehat{DAC}$ è un angolo interno non adiacente.

Abbiamo dimostrato che:

$\widehat{BCA} > \widehat{BCD} \cong \widehat{CDB} > \widehat{DAC}$, quindi

$\widehat{BCA} > \widehat{DAC}$, cioè $\widehat{C} > \widehat{A}$ nel triangolo ABC.

Vale anche il teorema inverso.

TEOREMA

Angolo maggiore → lato opposto maggiore

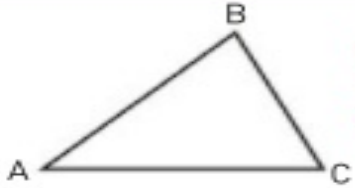
In un triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore.

Disuguaglianze fra i lati

TEOREMA

Disuguaglianze triangolari
In un triangolo, un lato è:

1. minore della somma degli altri due;
2. maggiore della loro differenza.

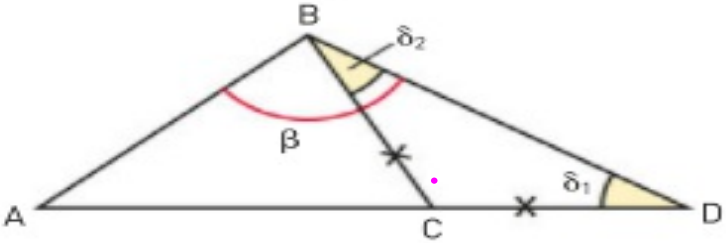


Ipotesi: ABC triangolo

Tesi: AB < AC + BC
AB > AC − BC (con AC ≥ BC)

DIMOSTRAZIONE

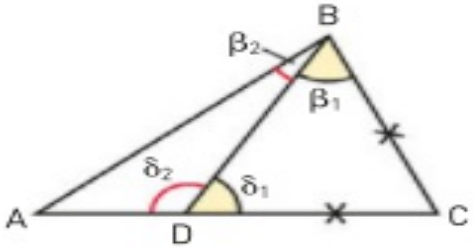
ANIMAZIONE Dimostriamo che $AB < AC + BC$.
Prolunghiamo AC di un segmento CD tale che $CD \cong BC$.



$\delta_1 \cong \delta_2$ perché angoli alla base del triangolo isoscele BDC.
$\beta > \delta_2$ perché BC è interno a β, quindi è anche $\beta > \delta_1$.
$AB < AD$ perché, nel triangolo ABD, $\delta_1 < \beta$, quindi AB è opposto ad angolo minore e AD ad angolo maggiore.
Essendo
$AD \cong AC + CD$ e $CD \cong BC$,
allora
$AD \cong AC + BC$.
$AB < AD$ e $AD \cong AC + BC$, quindi
$AB < AC + BC$.

Dimostriamo che $AB > AC - BC$.
Se $AC \cong BC$, allora la relazione della tesi diventa $AB > 0$, che è vera.
Dimostriamo poi la tesi se AC e BC non sono congruenti, con $AC > BC$.

Consideriamo D, punto interno di AC, tale che $CD \cong BC$.



$\delta_1 \cong \beta_1$ perché angoli alla base del triangolo isoscele DBC.
$\delta_2 > \beta_1$ perché, nel triangolo DBC, δ_2 è angolo esterno e β_1 è angolo interno non adiacente, quindi è anche $\delta_2 > \delta_1$.
$\delta_1 > \beta_2$ perché, nel triangolo ABD, δ_1 è angolo esterno e β_2 è angolo interno non adiacente; quindi $\delta_2 > \beta_2$.
$AB > AD$ perché, nel triangolo ABD, AB è opposto ad angolo maggiore, δ_2, e AD è opposto ad angolo minore, β_2.
Essendo
$AD \cong AC - CD$ e $CD \cong BC$,
allora
$AD \cong AC - BC$.
$AB > AD$ e $AD \cong AC - BC$,
quindi $AB > AC - BC$.